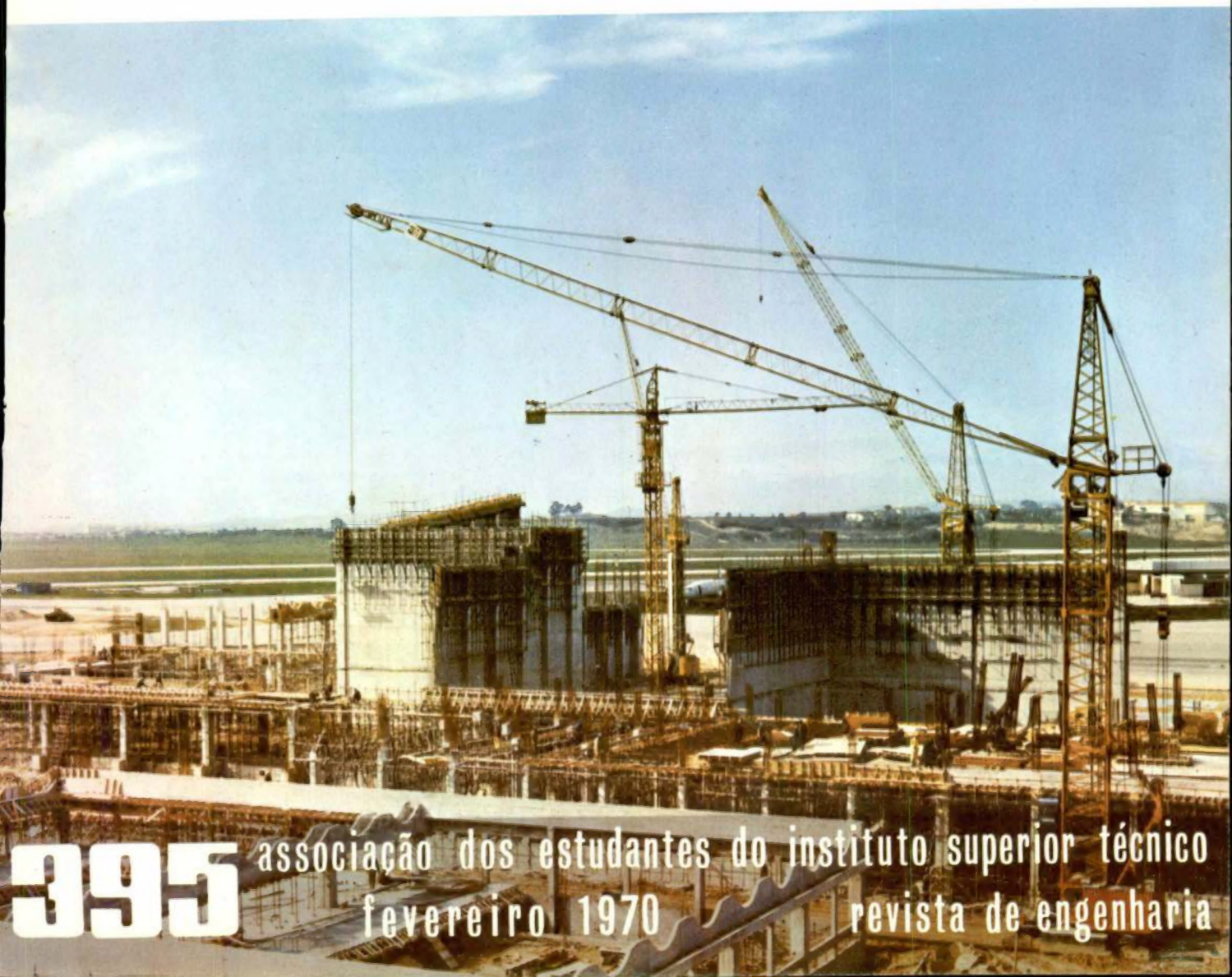
técnica



395 associação dos estudantes do instituto superior técnico
fevereiro 1970 revista de engenharia

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40 («Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA

Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE

TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE L.da
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

10.000 obras realizadas

- coberturas
- perfis especiais
- vigas pré-esforçadas
- pavimento trief
- protecção de segurança
- mosaicos
- tubos

materiais novobra

PAVIMENTOS

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADOS (HOMOLOGADOS PELO LAB. NAC. DE ENGENHARIA CIVIL)

LEIRIA	LISBOA	LAGOA
PONTE DAS MESTRAS TEL. 2 37 68	AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100, 5.º, Dto. TEL. 77 18 03 - 77 48 33	ESTRADA DO CARMO TEL. 94

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 395 FEVEREIRO DE 1970 ANO XLV VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

João Soares Alves

Administrador

Silvério de Sousa Mendes

Secretário

Rui Coutinho Torrinha

Chefe de Redacção

Vladimiro de Oliveira

Redactores

Alvaro Manuel Cortez
Francisco Toco Emílio
Henrique Nunes Garcia
Maria Manuela Mota

Assinaturas

		5 Nos.	10 Nos.
Continente e Ilhas	—	85$00	160$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	95$00	170$00
Estrangeiro	—		180$00

Número avulso — 25$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

219 *E. R. DE ARANTES E OLIVEIRA* — **A análise matricial de estruturas e o método dos elementos finitos.**

The matrix formulation of structural analysis and the finite elements method.

233 *DUARTE-RAMOS* — **Nova concepção do esquema equivalente de um dieléctrico sólido com cavidades.**

A new design of the equivalent sistem in a solid Dielectric with holes.

241 *J. SARAFANA* — **O problema da corrosão e das incrustações nos evaporadores para a dessalga da água do mar.**

The corrosion and scale problem in the evaporators for sea-water desalination.

253 *BARRADAS LEITÃO* — **Ensaios em modelo reduzido do fecho do rio Zambeze em Cabora-Bassa.**

Tests in a reduced model of the hidraulic closure in Zambeze river in Cabora-Bassa.

265 **Vida Escolar e Associativa**

Luís Moniz Pereira — Introdução aos autómatos infinitos e teoria da computabilidade.

240 **Notas informativas**

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

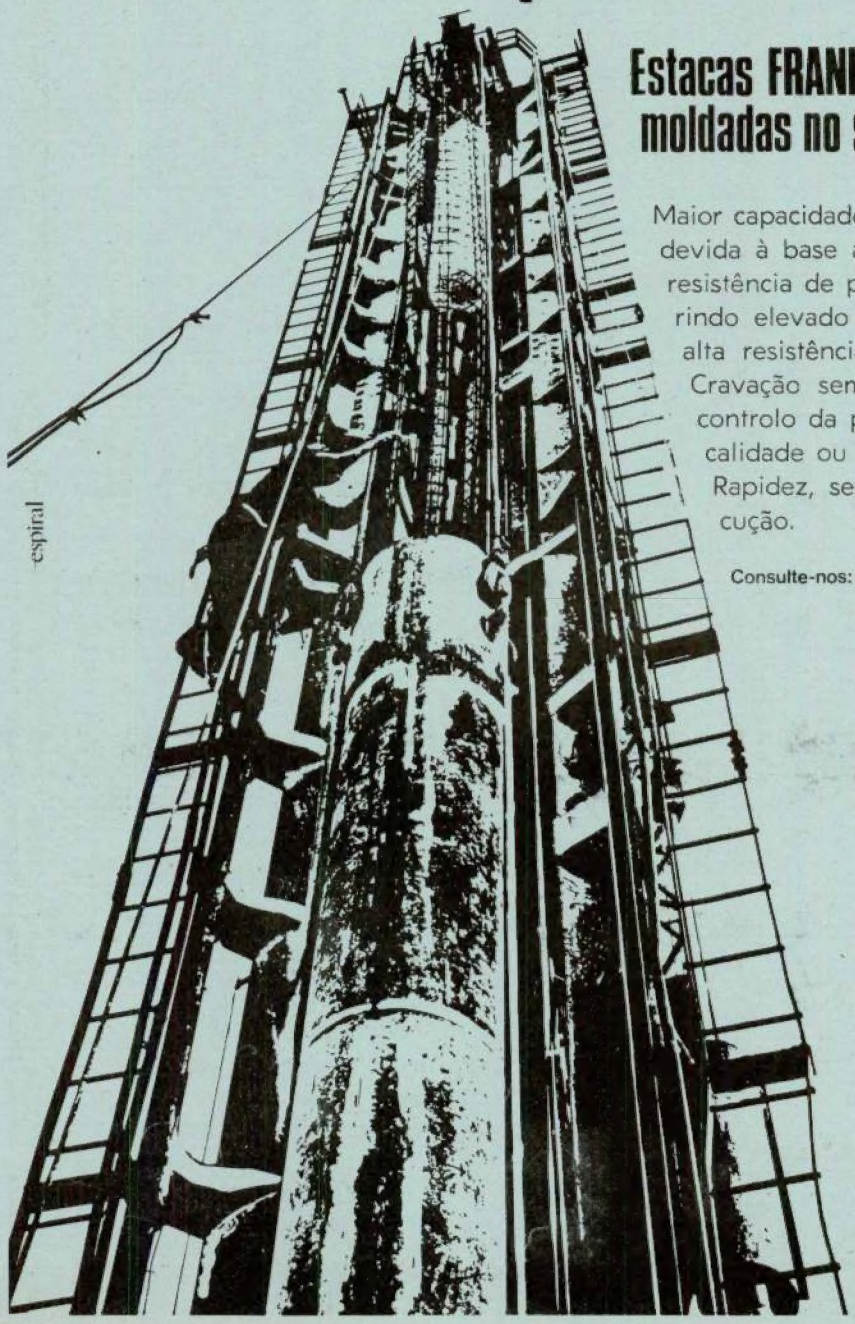
277 **Bibliografia**

CAPA: OBRA DO HANGAR N.º 6 PARA BOEINGS-747 TAP — Aeroporto de Lisboa — Empreitada geral a cargo de CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXXI
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Centro Técnico Hospitalar	XXV
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXXIII
Empresa Electro Cerâmica	XXIV
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fábrica Portugal	XXII
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Frapil	XV
Guedes & Almeida, Lda.	VIII e XXVI
Heliaço	2.ª da capa
Hidrel	XXVII
Isolux	XXVI
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	VII
J. F. Azevedo e Silva	IV
J. Roma	VII
Livros Técnicos	XXIX e XXXIV
MAGUE	XIII
Mendes de Almeida, S. A. R. L.	XXI
Mobil Oil	XVIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Philips Portuguesa	V
Prisma	XXVII
Quinzena Técnica Francesa	XXIV
Rotring	XXX
Siemens	XII
Setal	XXVII
Soc. Electricidade Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Amadeu Gaudêncio	XXIX
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
Soc. S. K. S. Lda.	XXII
Somague	XXIX
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	VII
Sopecate	II
SEPSA	XIV
Standard Eléctrica	IX
Tudor	XXIII
Wild Portugal, Lda.	III

uma base que lhe garante a segurança de uma técnica experimentada.



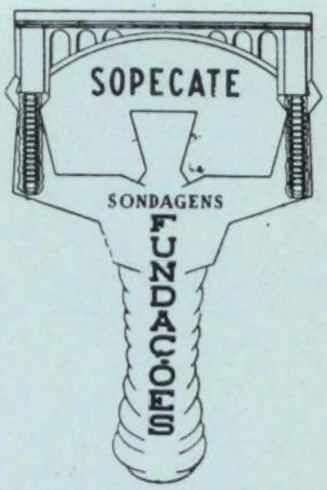
Estacas FRANKI, moldadas no solo.

Maior capacidade de carga das estacas Franki devida à base alargada assegurando grande resistência de ponta, ao fuste rugoso conferindo elevado atrito lateral e ao betão de alta resistência por apiloamento enérgico. Cravação sem extracção do terreno com controlo da profundidade a atingir. Verticalidade ou inclinações do máximo rigor. Rapidez, segurança e economia de execução.

Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL

FRANKI

espiral



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS

• REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1

TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS

PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS

LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

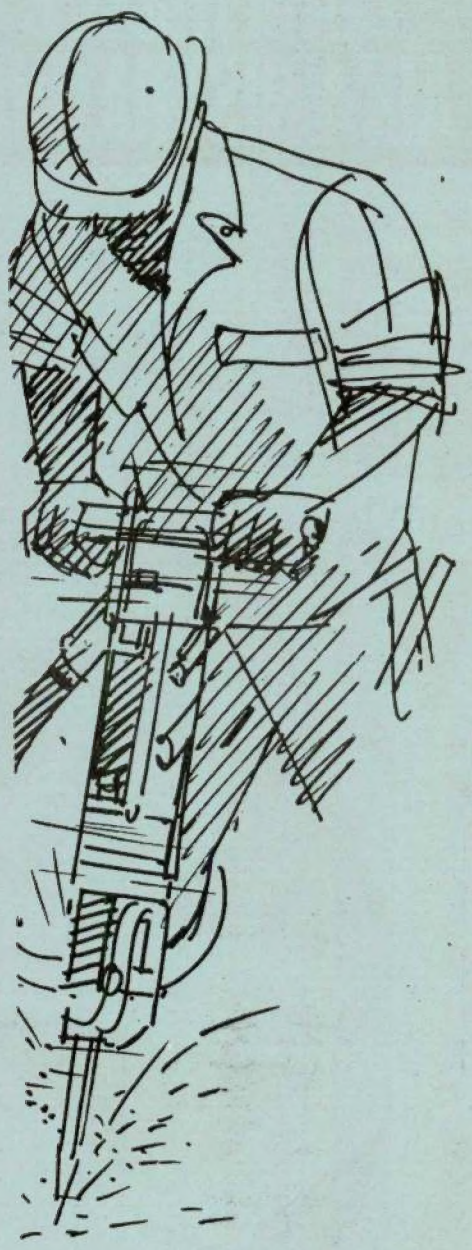
LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

Inabalável

é o nosso novo compensador



no nível automático para engenheiro WILD NA 2

Amortecedor eficiente para vento e vibrações do solo

Suspensão robusta do pêndulo

Além disso o novo

Botão de controlo do funcionamento

Dispensa de bater no tripé ou no instrumento

Acessório sob pedido:
Micrómetro de lâminas de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.
Imagem direita de observação de grande nitidez

Modelo NAK 2 com círculo de vidro

WILD
HEERBRUGG

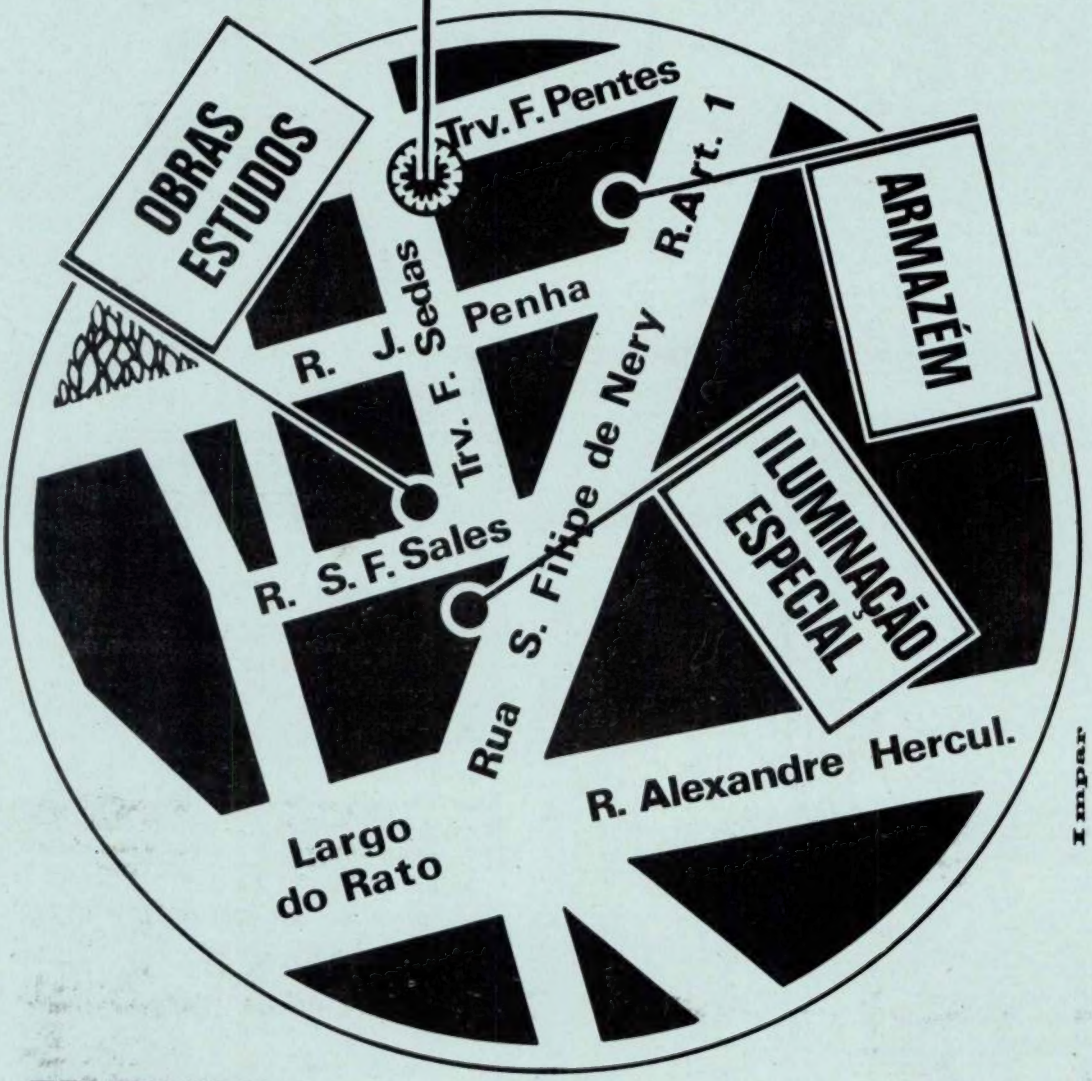
Representantes exclusivos:

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 91 12

PARTICIPA QUE TRANSFERIU ÀS SUAS DIVISÕES

COMERCIAL e ADMINISTRATIVA



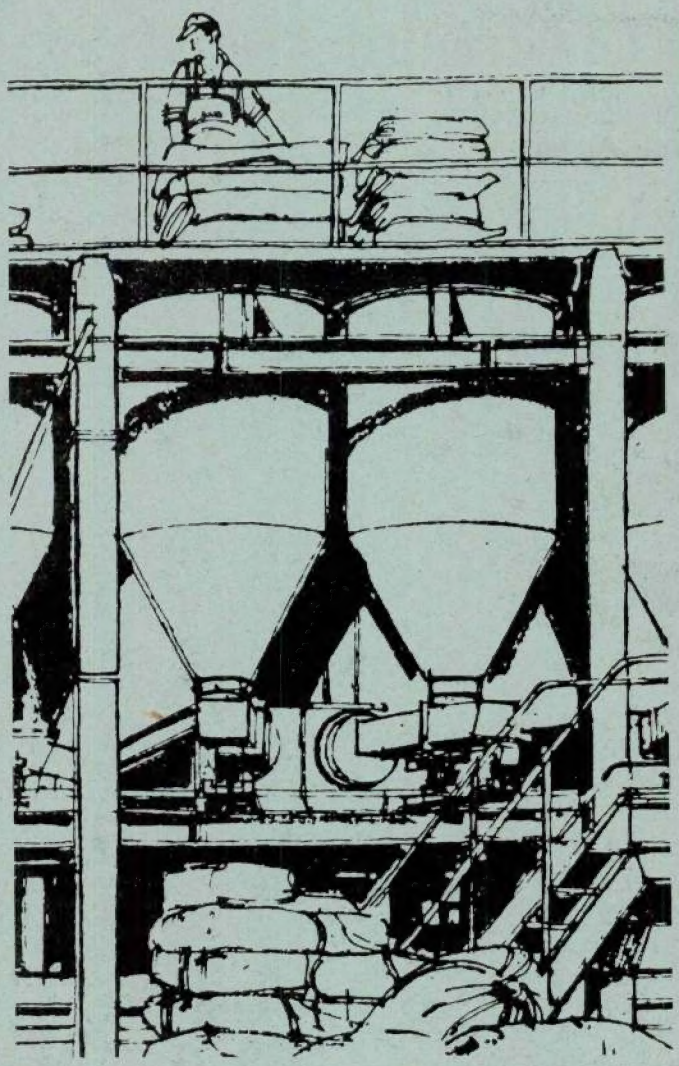
TELEFONES:

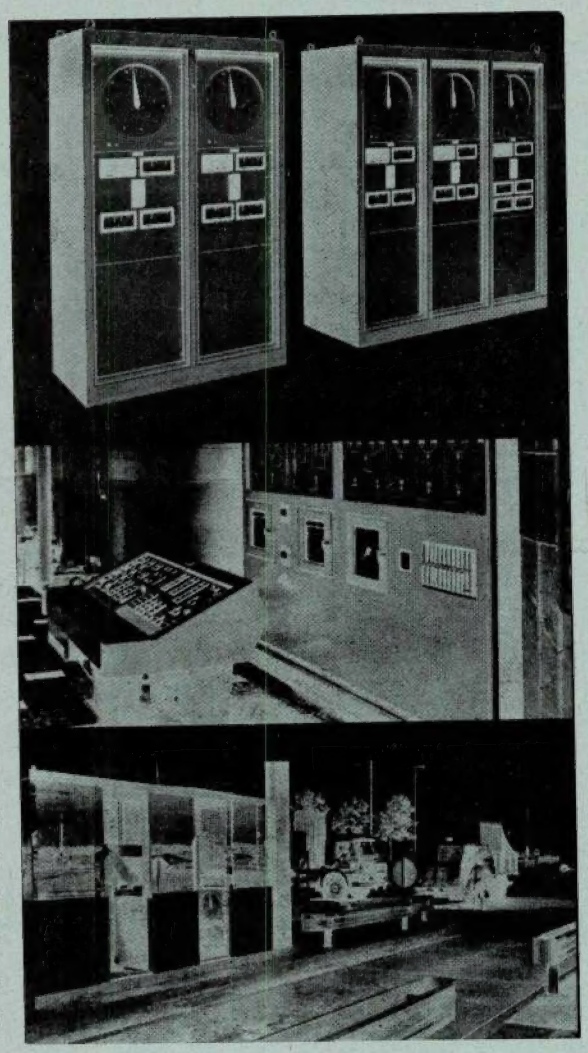
GERAL 654165/8 * COMERCIAL 654332

COMPRAS 651803 * TESOURARIA 650000

ILUMINAÇÃO ESPECIAL 653711

J. F. DE AZEVEDO E SILVA & C.ª, L.DA





Mais de 5000 instalações de pesagem electrónica

em uso em todo o mundo foram concebidas e realizadas pelos engenheiros da Philips. Muitas trabalham em meios ambientes altamente agressivos — que fariam fracassar qualquer sistema de pesagem mecânica se alguém tivesse a ideia de os fazer trabalhar em tais condições.

Os sistemas de pesagem electrónica Philips são estanques ao pó e à humidade e insensíveis ao choque e às vibrações. Têm uma vida pràticamente ilimitada, mantendo-se a sua precisão ao longo do tempo. As células de pesagem, devido às suas reduzidas dimensões, tornam muito fácil a montagem mesmo em espaços exíguos.

Não requerendo as alavancas normalmente usadas na pesagem mecânica, a pesagem electrónica poupa espaço e dinheiro, dado que não exige fundações caras.

As ligações entre as células de pesagem e o aparelho indicador fazem-se por meio de cabos eléctricos o que permite tornar a posição daquele independente do local da pesagem.

O equipamento de pesagem Philips é de concepção modular possuindo entrada e saída digitais.

Se necessitar de um sistema de pesagem em plataforma, em tanques ou silos, em telas transportadoras ou de um equipamento para doseamento automático de produtos, peça informação detalhada à

DEPTº INDÚSTRIA

PHILIPS

PHILIPS PORTUGUESA, S.A.R.L.

AV. DUARTE PACHECO, 6 - LISBOA - TELEFS. 65 45 21/8 • RUA FERNANDES TOMÁS, 760-764 - PORTO - TELEFS. 2 74 47/8/9

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

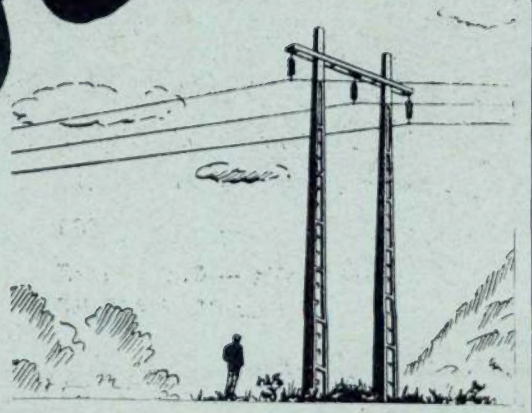
CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

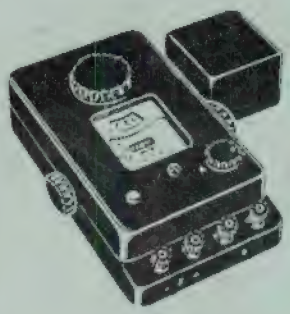
SOCIEDADE PORTUGUESA
Carvam



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1-TELEF. 47812-50129

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO



Aparelhagem de medidas eléctricas

+ indicadora
+ reguladora
+ registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º — LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S 3 — PORTO Tel. 0236732

WABCO

WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY

Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.° — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Eléctrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 países, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 países entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, África do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

Standard Eléctrica **ITT**

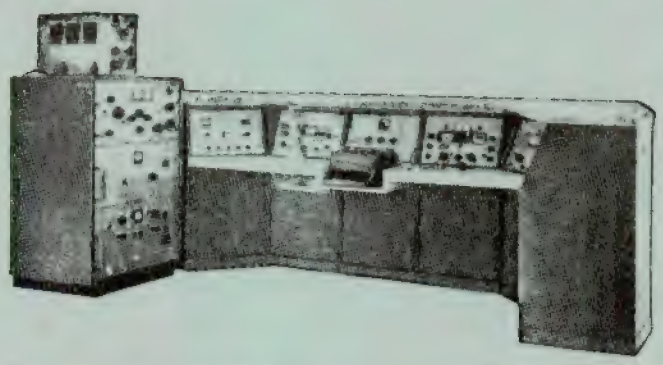
TG

PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

Também próprio para: impermeabilizar terrenos, paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

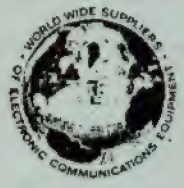
RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TELEF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados



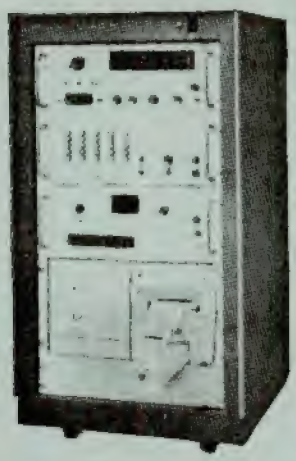
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

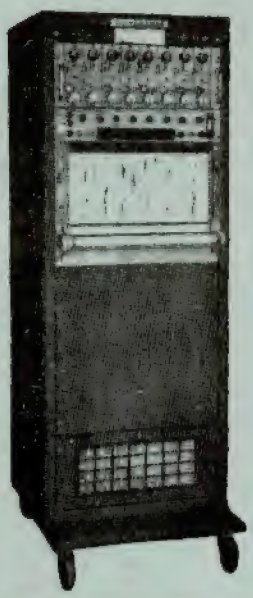
aparelhagem electrónica de medida e registo

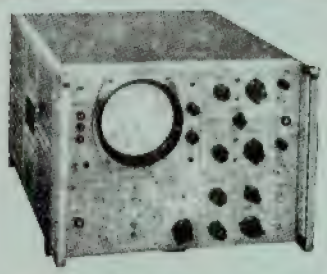
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn





Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

SIEMENS

6170

Disjuntor Siemens de corrente de defeito

Protege pessoas e animais

- contra tensões de contacto excessivamente elevadas, em aparelhagem deficientemente isolada
- em casos de troca do condutor principal pelo condutor de protecção, ou ainda, troca entre o condutor de protecção e o neutro
- duma maneira geral, portanto, sempre que uma corrente perigosa passa, através do corpo de pessoas ou de animais, à terra

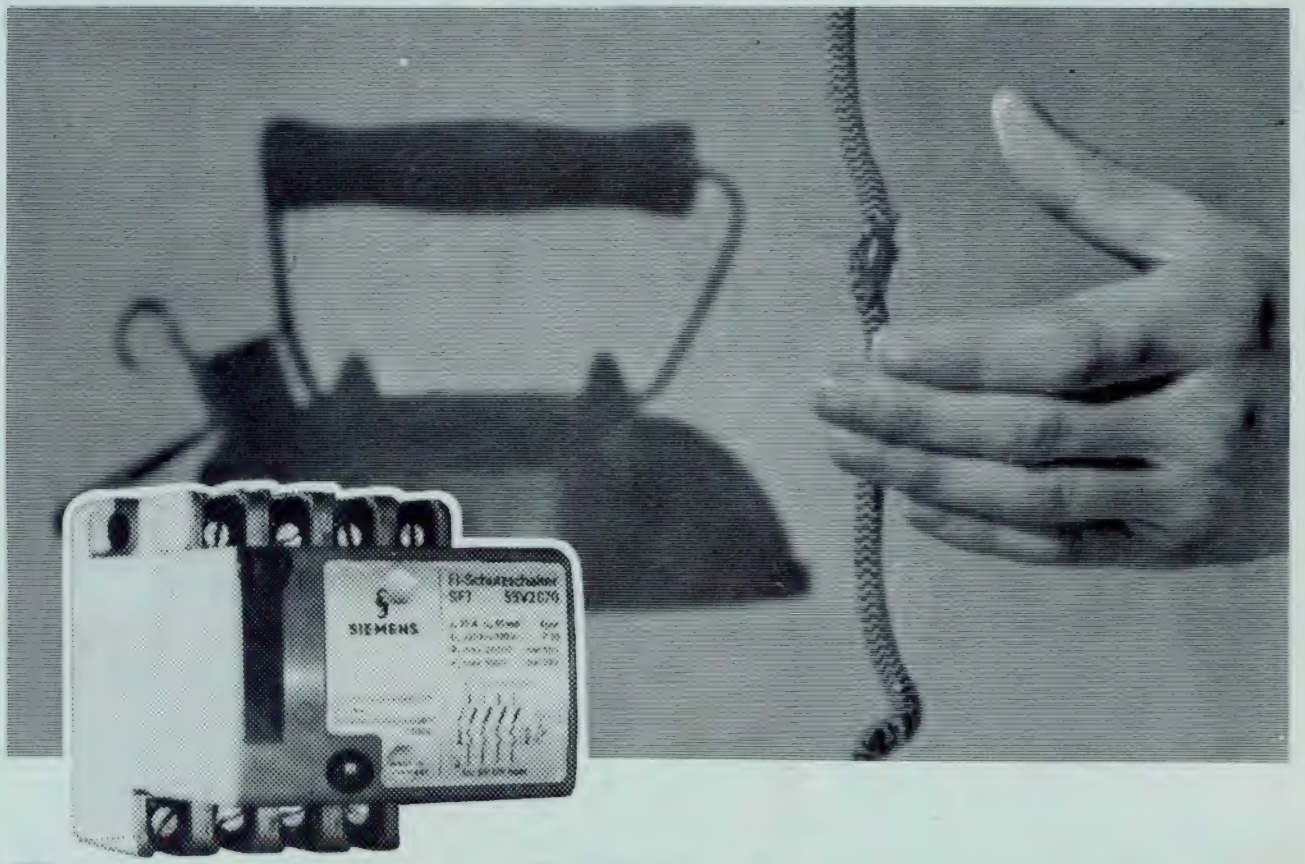
Garante

- grande protecção humana
- em caso de terra fraca, uma supersensibilidade **(dispara para correntes de defeito entre 15 e 30 mA segundo prescrições VDE 0100 e dentro de 30 ms)**
- elevado poder de corte
- longa duração, cerca de 20.000 manobras à corrente nominal

Aplica-se

como interruptor geral em habitações, hospitais, oficinas, fábricas, instalações provisórias, obras e em todos os casos em que haja elevado grau de humidade ou deficientes condições de isolamento.

Exponha os seus problemas especiais à secção técnica da
Siemens-Companhia de Electricidade, SARL
Av. Almirante Reis, 65-tel. 536921-Lisboa 1
R. das Carmelitas, 26-2.º - Tel. 28943 - Porto



O melhor sistema de protecção humana

técnica

NÚMERO 395 FEVEREIRO DE 1970 ANO XLVI VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 624.04

A ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (*)

por EDUARDO ROMANO DE ARANTES E OLIVEIRA
Professor do I.S.T.
Chefe de Divisão de Matemática Aplicada do LNEC

RESUMO

A formulação matricial da análise estrutural veio remediar alguns dos graves inconvenientes que caracterizavam a Teoria das Estruturas. Só porém a técnica dos elementos finitos viria dar à análise estrutural a generalidade de que carecia.

No presente trabalho, concebido para alunos, apresentam-se em primeiro lugar elementos de análise matricial e, seguidamente, noções elementares da técnica dos elementos finitos.

SYNOPSIS

The matrix formulation of structural analysis could obviate to some defects of the Theory of Structures. Only the finite element technique would give however to structural analysis the generality which was missing.

In the present paper intended for students, basic notions of matrix analysis are first introduced, followed by a short description of the finite element method.

1 — INTRODUÇÃO

A Teoria das Estruturas antiga era caracterizada por gravíssimos defeitos. Destacam-se entre eles:

- a insuficiente generalidade (só considerava estruturas reticuladas)
- a deficiente sistematização e falta de unidade
- o isolamento relativamente aos métodos gerais da Análise Numérica
- a insuficiência dos instrumentos matemáticos utilizados

A formulação matricial da teoria das estruturas reticuladas veio remediar todos estes inconvenientes excepto o primeiro. Só a técnica dos elementos finitos daria mais tarde à Teoria das Estruturas a generalidade de que carecia.

Não pode surpreender que a Álgebra Matricial seja um instrumento adequado ao cálculo de estruturas. A arrumação do cálculo mediante o preenchimento de tabelas que se obtêm sucessivamente uma das outras é com efeito prática corrente nos gabinetes de estudo, e a Álgebra Matricial não é no fundo mais que uma álgebra de tabelas.

2 — ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS

2.1 — Matriz de rigidez

Considere-se uma barra no espaço solicitada por forças e momentos nas suas extremidades.

O estado de tensão e deformação no interior da barra fica determinado se forem dadas essas

(*) Notas de lições proferidas pelo autor na Universidade Federal do Rio de Janeiro em Agosto e Setembro de 1969.

forças e momentos, ou os deslocamentos e rotações correspondentes.

Designar-se-ão as forças e momentos por forças generalizadas, e os deslocamentos e rotações por deslocamentos generalizados.

Sejam $\mathbf{F}^e$, $\mathbf{M}^e$ e $\mathbf{F}^d$, $\mathbf{M}^d$ os vectores das forças generalizadas actuantes respectivamente nas extremidades esquerda e direita. Sejam $\mathbf{u}^e$, $\mathbf{t}^e$ e $\mathbf{u}^d$, $\mathbf{t}^d$ os correspondentes vectores dos deslocamentos e rotações (fig. 1).

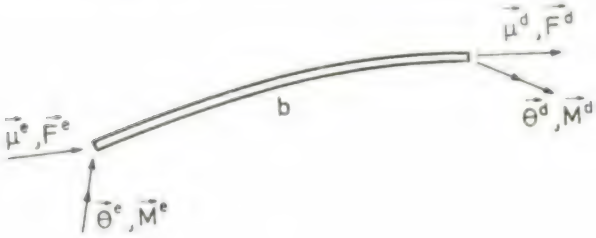


Fig. 1

Sejam u_1^e, u_2^e, u_3^e as componentes de $\mathbf{u}^e$, θ_1^e, θ_2^e, θ_3^e as de $\mathbf{t}^e$, etc., e considerem-se os seguintes vectores:

$$\mathbf{q}^{be} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ \theta_1^e \\ \theta_2^e \\ \theta_3^e \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q}^{bd} = \begin{Bmatrix} u_1^d \\ u_2^d \\ u_3^d \\ \theta_1^d \\ \theta_2^d \\ \theta_3^d \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{be} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ M_1^e \\ M_2^e \\ M_3^e \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{Q}^{bd} = \begin{Bmatrix} F_1^d \\ F_2^d \\ F_3^d \\ M_1^d \\ M_2^d \\ M_3^d \end{Bmatrix}$$

e ainda

$$\mathbf{q}^b = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{be} \\ \mathbf{q}^{bd} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{Q}^b = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^{be} \\ \mathbf{Q}^{bd} \end{Bmatrix}$$

Supondo que os deslocamentos generalizados das extremidades da barra sofrem uma variação infinitesimal, a correspondente variação da energia da deformação é igual ao trabalho das forças exteriores pela variação dos deslocamentos. Tem-se assim

$$\delta U^b = \mathbf{Q}^{bT} \, \delta \mathbf{q}^b \tag{1}$$

Ora, pelo princípio da sobreposição, as forças são funções lineares dos deslocamentos, isto é,

$$\begin{cases} Q_1^b = k_{11}^b q_1^b + k_{12}^b q_2^b + \ldots + k_{1j} q_j^b + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_i^b = k_{i1}^b q_1^b + \ldots\ldots + k_{ij} q_j^b + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2}$$

em que se denotam por Q_1^b, Q_2^b, ... os elementos do vector $\mathbf{Q}^b$, e por q_1^b, q_2^b, ... os elementos do vector $\mathbf{q}^b$.

Fazendo

$$\mathbf{K}^b = \left[k_{ij}^b \right] \tag{3}$$

tem-se

$$\mathbf{Q}^b = \mathbf{K}^b \, \mathbf{q}^b \tag{4}$$

$\mathbf{K}^b$ diz-se matriz de rigidez.

Suponham-se nulos todos os elementos de $\mathbf{q}^b$ excepto o de ordem j que se toma igual a um (estado de deformação unitária de ordem j). Vem

$$\begin{cases} Q_1^b = k_{1j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_i^b = k_{ij} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4'}$$

Como $k_{1j}, \ldots, k_{ij}, \ldots$ são os elementos da coluna de ordem j de $\mathbf{K}^b$, segue-se que os elementos da coluna de ordem j de $\mathbf{K}^b$ são as forças que é necessário aplicar na barra para conseguir o estado de deformação unitária de ordem j. O elemento k_{ji}^b de $\mathbf{K}^b$ é pois a força de ordem i necessária para conseguir o estado de deformação unitária de ordem j.

Os teoremas da reciprocidade permitem concluir que a força de ordem i necessária para conseguir o estado de ordem j é igual à força de ordem j

necessária para conseguir o estado de ordem i. Por isso,

$$k^b_{ij} = k^b_{ji} \tag{5}$$

Isto signica que $\mathbf{K}^b$ é uma matriz simétrica, isto é, que

$$\mathbf{K}^b = \mathbf{K}^{b^T} \tag{5'}$$

Introduza-se (4) em (1). Vem

$$\delta U^b = \left(\mathbf{K}^b\, q^b\right)^T \delta q^b = q^{b^T}\, \mathbf{K}^{b^T}\, \delta q^b =$$

$$= q^{b^T}\, \mathbf{K}^b\, \delta q^b \tag{6}$$

Integrando, obtém-se

$$U^b = {}^1/_2\, q^{b^T}\, \mathbf{K}^b\, q^b \tag{7}$$

A matriz de rigidez é assim a forma quadrática da energia de deformação.

2.2 — Caso plano

Considere-se uma barra plana solicitada e deformada no próprio plano.

Tem-se em cada extremidade duas componentes de força e um momento, e duas translações e uma rotação. O vector dos deslocamentos é

$$q^b = \begin{Bmatrix} u^e_1 \\ u^e_2 \\ \theta^e \\ u^d_1 \\ u^d_2 \\ \theta^d \end{Bmatrix} \qquad Q^b = \begin{Bmatrix} F^e_1 \\ F^e_2 \\ M^e \\ F^d_1 \\ F^d_2 \\ M^d \end{Bmatrix}$$

Suponha-se a barra de eixo rectilíneo e secção constante (área Ω e momento de inércia I). A matriz de rigidez, é, no caso de se desprezar a deformação por esforço transverso, e de os sentidos positivos das componentes serem os indicados na figura 2,

Fig. 2

$$K^b = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\
0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\
0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\
\hline
-\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 & \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\
0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\
0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L}
\end{array}\right] \tag{8}$$

A primeira coluna da matriz de rigidez contém as forças necessárias para que a extremidade esquerda sofra uma translação unitária, sendo nulos todos os restantes deslocamentos (fig. 3).

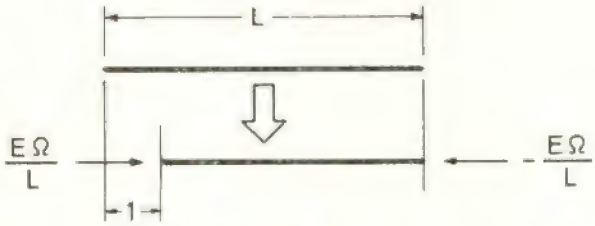


Fig. 3

A quinta, por exemplo, refere-se a uma translação, unitária e perpendicular à barra, da respectiva extremidade direita (fig. 4). A sexta, à rotação unitária da mesma extremidade (fig. 5), e assim sucessivamente.

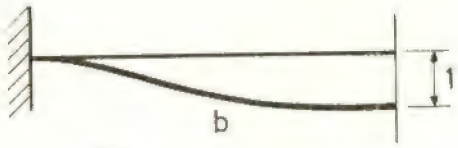


Fig. 4

Fig. 5

No caso de as componentes não se referirem a eixos que não sejam paralelos e perpendiculares à barra, a situação complica-se. A matriz referida a esses eixos pode no entanto ser determinada, por operações matriciais simples, a partir da matriz referida ao referencial próprio da barra, isto é, ao eixo da barra e a eixos perpendiculares.

2.3 — Mudança de coordenadas

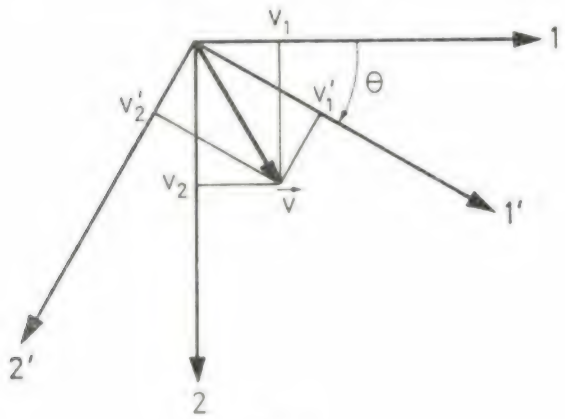


Fig. 6

Considere-se uma rotação θ dos eixos coordenados.

Sendo $\vec{v}$ um vector arbitrário, tem-se

$$\begin{cases} v_1 = v_1' \cos\theta - v_2' \operatorname{sen}\theta \\ v_2 = v_1' \operatorname{sen}\theta + v_2' \cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

ou, sob forma matricial,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{v}' = \mathbf{S}\,\mathbf{v}' \tag{10}$$

em que

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}' = \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

É fácil reconhecer que

$$\mathbf{S}^T\,\mathbf{S} = \mathbf{S}\,\mathbf{S}^T = \mathbf{I} \tag{11}$$

Por isso, multiplicando (10) à esquerda por $\mathbf{S}^T$, vem

$$\mathbf{S}^T\,\mathbf{v} = \mathbf{S}^T\,\mathbf{S}\,\mathbf{v}' = \mathbf{v}' \tag{12}$$

Consegue-se, pois, com toda a facilidade, exprimir $\mathbf{v}'$ em termos de $\mathbf{v}$.

No espaço tridimensional obter-se-iam expressões semelhantes às que foram obtidas para o caso bidimensional.

Atendendo a que $u_1^b, u_2^b, \ldots$ são componentes de vectores, tem-se

$$\mathbf{q}^{be} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}'^{be} = \mathbf{R}^b\,\mathbf{q}'^{be} =$$

$$= \mathbf{q}'^{be} = \mathbf{R}^{bT}\,\mathbf{q}^{be} \tag{13}$$

$$\mathbf{q}^{bd} = \mathbf{R}^b\,\mathbf{q}'^{bd} \qquad \mathbf{q}'^{bd} = \mathbf{R}^{bT}\,\mathbf{q}^{bd} \tag{14}$$

$$\mathbf{Q}^{be} = \mathbf{R}^b\,\mathbf{Q}'^{be} \qquad \mathbf{Q}'^{be} = \mathbf{R}^{bT}\,\mathbf{Q}^{be} \tag{15}$$

$$\mathbf{Q}^{bd} = \mathbf{R}^b\,\mathbf{Q}'^{bd} \qquad \mathbf{Q}'^{bd} = \mathbf{R}^{bT}\,\mathbf{Q}^{bd} \tag{16}$$

Multiplicando (4) à esquerda por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}^{bT} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^{bT} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{bT} \tag{17}$$

vem

$$\mathbf{T}^{bT}\,\mathbf{Q}^b = \mathbf{T}^{bT}\,\mathbf{K}^b\,\mathbf{q}^b \tag{18}$$

ou

$$\mathbf{Q}'^b = \mathbf{T}^{bT}\,\mathbf{K}^b\,\mathbf{T}^b\,\mathbf{q}'^b \tag{19}$$

A nova matriz de rigidez, isto é, a matriz tal que

$$\mathbf{Q}'^b = \mathbf{K}'^b\,\mathbf{q}'^b \tag{20}$$

é pois

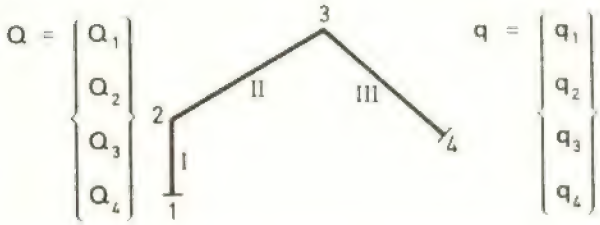
$$\mathbf{K}'^b = \mathbf{T}^{bT}\,\mathbf{K}^b\,\mathbf{T}^b \tag{21}$$

2.4 — Análise de uma estrutura

O problema que se põe agora é o da análise de uma estrutura reticulada, isto é, de um sistema de barras.

A deformação desse sistema pode definir-se dando os deslocamentos (generalizados) dos nós

ou as forças (generalizadas) actuantes nesses nós (fig. 7).



q_i — vector dos deslocamentos do nó i
Q_i — vector das forças actuantes no nó i

Fig. 7

Em virtude do princípio de sobreposição, Q relaciona-se com q por

$$Q = K\,q \tag{22}$$

Em virtude de raciocínio semelhante ao que foi feito para a barra isolada, pode concluir-se que K é a matriz simétrica da forma quadrática da energia de deformação da estrutura, expressa em termos dos deslocamentos nodais.

Tem-se assim

$$U = {}^1/_2\, q^T\, K\, q \tag{22'}$$

A análise da estrutura pode ser conseguida a partir de três grupos de equações: as equações de compatibilidade, as de equilíbrio e as relações forças-deslocamentos das barras (4).

Supor-se-á, na análise que se segue, que as forças exteriores estão aplicadas nos nós. Ver-se-á depois como tratar casos em que as forças exteriores se apliquem nas barras.

2.5 — Equações de compatibilidade

As equações de compatibilidade afirmam que as extremidades coincidentes de todas as barras que convergem num determinado nó têm deslocamentos iguais.

Considere-se o exemplo da fig. 7. Tem-se

$$\left.\begin{array}{l} q'^{\,1e} = q_1 \\ q'^{\,1d} = q_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow q'^{\,1} = \left\{\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l} q'^{\,IIe} = q_2 \\ q'^{\,IId} = q_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow q'^{\,II} = \left\{\begin{array}{c} q_2 \\ q_2 \end{array}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{array}{l} q'^{\,IIIe} = q_3 \\ q'^{\,IIId} = q_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow q'^{\,III} = \left\{\begin{array}{c} q_3 \\ q_4 \end{array}\right\} \tag{25}$$

(23) pode tomar a forma

$$q'^{\,I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q \tag{26}$$

ou, atendendo a (13) e (14),

$$q^{I} = \begin{bmatrix} R^{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} q = A^{I}\, q \tag{27}$$

Do mesmo modo,

$$q^{II} = \begin{bmatrix} 0 & R^{II} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{II} & 0 \end{bmatrix} q = A^{II}\, q \tag{28}$$

$$q^{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R^{III} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{III} \end{bmatrix} = A^{III}\, q \tag{29}$$

Para uma estrutura arbitrária, as equações têm a mesma forma, isto é, tem-se em geral, para cada barra

$$q^{b} = A^{b}\, q \tag{30}$$

2.6 — Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio exprimem o equilíbrio de cada nó.

Considere-se a barra da fig. 8,

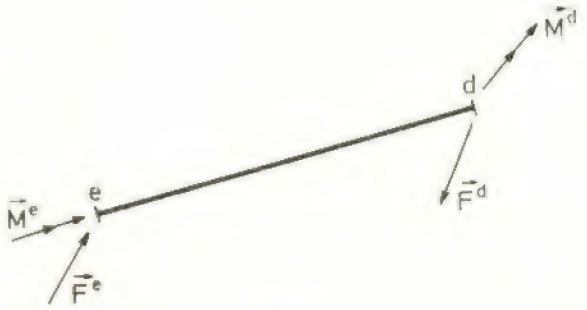


Fig. 8

e tome-se um troço muito pequeno junto, por exemplo, da extremidade esquerda (fig. 9). Seja e′ a extremidade do troço que não é extremidade da barra

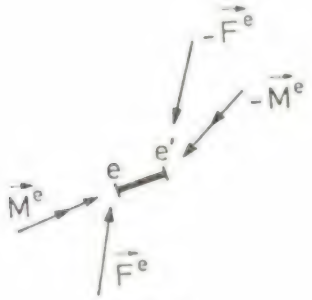


Fig. 9

Dado que o troço $\overline{ee'}$ é muito pequeno, é evidente que as forças generalizadas que é necessário aplicar na extremidade e′ para substituir a acção da porção restante da barra, têm de ser iguais e de sinal contrário às forças actuantes na extremidade e.

Isole-se agora um nó, por exemplo, o nó 2 da estrutura representada na fig. 7. O raciocínio precedente justifica que se considerem para a análise do equilíbrio, as forças indicadas na fig. 10.

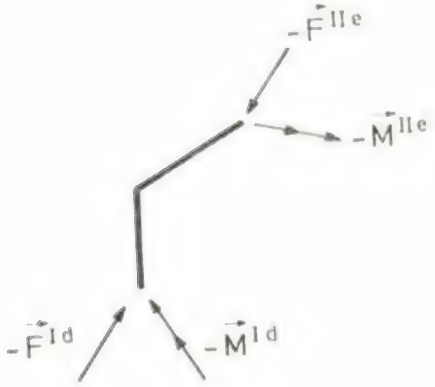


Fig. 10

Tem-se pois a seguinte condição de equilíbrio:

$$-\mathbf{Q}'^{\,I\,d} - \mathbf{Q}'^{\,II\,e} + \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0} \qquad (31)$$

ou

$$\mathbf{R}^{I\,T}\,\mathbf{Q}^{I\,d} + \mathbf{R}^{II\,T}\,\mathbf{Q}^{II\,e} = \mathbf{Q}_2 \qquad (32)$$

As equações de equilíbrio relativas à estrutura tomada para exemplo são, na sua totalidade, as seguintes:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{I\,T}\,\mathbf{Q}^{I\,e} = \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{R}^{I\,T}\,\mathbf{Q}^{I\,d} + \mathbf{R}^{II\,T}\,\mathbf{Q}^{II\,e} = \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{R}^{II\,T}\,\mathbf{Q}^{II\,d} + \mathbf{R}^{III\,T}\,\mathbf{Q}^{III\,e} = \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{R}^{III\,T}\,\mathbf{Q}^{III\,d} = \mathbf{Q}_4 \end{cases} \qquad (33)$$

É fácil verificar que podem tomar a forma

$$\sum_b \mathbf{A}^{b\,T}\,\mathbf{Q}^b = \mathbf{Q} \qquad (34)$$

sendo as matrizes $\mathbf{A}^b$ as que intervêm nas equações de compatibilidade.

2.7 — Equações de equilíbrio em geral

A forma (34) das equações de equilíbrio não é acidental. Pode ser fàcilmente estabelecida para o caso geral considerando que uma variação da energia de deformação da estrutura é a soma das energias de deformação de todas as barras.

Tem-se assim

$$\delta U = \mathbf{Q}^T\,\delta_q = \sum_b \delta U^b = \sum_b \mathbf{Q}^{b\,T}\,\delta q^b \qquad (35)$$

Introduzindo (30), vem pois

$$\mathbf{Q}^T\,\delta_q = \left(\sum_b \mathbf{Q}^{b\,T}\,\mathbf{A}^b\right)\delta q \qquad (36)$$

Como δq é arbitrário, a igualdade (36) implica (34).

2.8 — Resumo das equações. Método dos deslocamentos.

As equações que governam o sistema são pois:

equações de equilíbrio: $\mathbf{Q} = \sum_b \mathbf{A}^{b\,T}\,\mathbf{Q}^b \qquad (37)$

equações de compatibilidade: $\mathbf{q}^b = \mathbf{A}^b\ \mathbf{q}$ (38)

relações forças-deslocamentos: $\mathbf{Q}^b = \mathbf{K}^b\ \mathbf{q}^b$ (39)

Para resolver estas equações pode-se começar por eliminar as forças, formulando o problema em tempos dos deslocamentos. Tem-se então o método dos deslocamentos.

Eliminando os deslocamentos, tem-se o problema formulado em termos de forças: é o método de forças.

Não se descreverá o método das forças.

Quanto ao método dos deslocamentos, é fácil de formular. As forças eliminam-se introduzindo (39) e (38) em (37). Vem

$$\mathbf{Q} = \sum_b \mathbf{A}^{b\,T}\ \mathbf{K}^b\ \mathbf{A}^b\ \mathbf{q} \qquad (40)$$

equação que serve para determinar os deslocamentos.

Comparando (40) com (22) conclui-se

$$\mathbf{K} = \sum_b \mathbf{A}^{b\,T}\ \mathbf{K}^b\ \mathbf{A}^b \qquad (41)$$

Conseguiu-se pois exprimir a matriz de rigidez da estrutura em termos das dos elementos. Tal é um dos notáveis resultados da análise matricial das estruturas.

Observa-se que a fórmula (41) pode tomar a mesma forma que a fórmula (21). Com efeito, fazendo

$$q = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{I} \\ \mathbf{q}^{II} \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{b} \\ \vdots \end{Bmatrix} \qquad A = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}^{I} \\ \mathbf{A}^{II} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{b} \\ \vdots \end{Bmatrix} \qquad (42)$$

vem

$$q = A\ \mathbf{q} \qquad (43)$$

Fazendo

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{II} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{K}^{b} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (44)$$

a fórmula (41) transforma-se em

$$\mathbf{K} = A^T\ K\ A \qquad (45)$$

a qual pode interpretar-se como a fórmula de transformação da matriz de rigidez para a mudança de coordenadas (deslocamentos) (43).

2.9 — Forças actuantes nas barras

Supôs-se até aqui que as forças exteriores se aplicavam nos nós da estrutura.

O caso em que as forças estejam aplicadas nas barras pode converter-se fàcilmente num outro em que as forças estejam aplicadas nos nós.

Atenda-se à fig. 11.

Pode considerar-se o caso (a) como sobreposição do caso (b) e do caso (c). No caso (b), os nós da estrutura não se movem nem rodam, pelo que há que aplicar nas extremidades da barra carregada forças e momentos de fixação iguais às forças e momentos de encastramento. No caso (b), os esforços são pois nulos em todas as barras excepto na barra carregada, que funciona como isolada e perfeitamente encastrada. No caso (c) forças e momentos iguais aos de fixação com o sinal trocado são aplicados nos nós. É evidente que os casos (b) e (c) sobrepostos dão o caso (a).

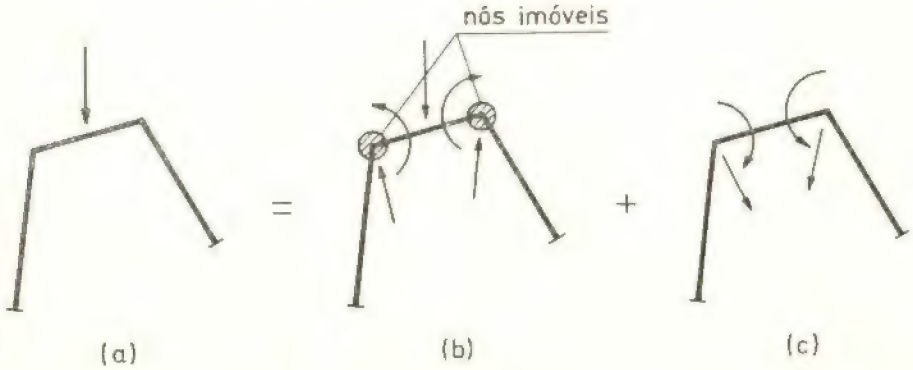


Fig. 11

3. GENERALIZAÇÃO PARA ESTRUTURAS NÃO RETICULADAS

3.1 — A necessidade da discretização

A teoria das peças lineares é uma teoria discreta, isto é, o campo elástico no interior de uma barra pode exprimir-se *exactamente* em termos de um número finito de parâmetros: os deslocamentos generalizados ou as forças generalizadas nas extremidades da barra.

Já a teoria das cascas, por exemplo, não é uma teoria discreta, visto que não há possibilidade de definir em termos de um número finito de parâmetros a distribuição das grandezas que nela intervêm. Na realidade, a teoria das peças lineares é, entre os modelos analíticos da Teoria das Estruturas, o único discreto. E isso explica que as estruturas reticuladas, que são constituídas por elementos lineares, fossem as primeiras a ser abordadas pela Teoria das Estruturas.

Para analisar estruturas não reticuladas, há que recorrer à integração formal de equações diferenciais, ou introduzir hipóteses simplificativas que permitam transformá-las em sistemas discretos.

O método dos elementos finitos não é mais que uma técnica geral de discretização.

3.2 — Técnicas de discretização

As técnicas de discretização utilizadas na análise estrutural são fundamentalmente de dois tipos:

a) os métodos de diferenças finitas
b) os métodos de sobreposição

Os segundos baseiam-se na expressão aproximada do campo como combinação linear de um número (finito) de campos elementares conhecidos. As incógnitas a determinar são os coeficientes dessa combinação linear.

O método dos elementos finitos é um método de sobreposição que considera o domínio correspondente à estrutura subdividido em certo número de subdomínios. Os campos elementares têm expressão analítica diferente em cada um dos subdomínios, em vez de uma única expressão válida em todo o domínio. Diz-se que os campos têm definição seccional.

Para se compreender a vantagem da definição seccional, considere-se o caso de uma função de uma única variável $y = f(x)$ (fig. 12).

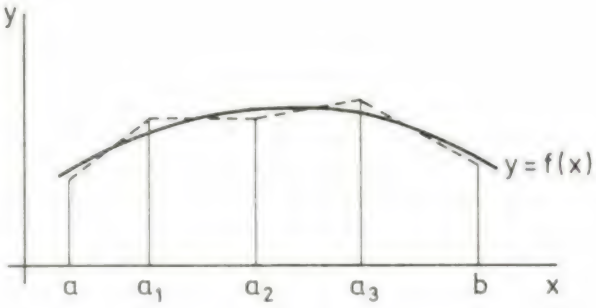


Fig. 12

Será em geral difícil aproximar esta função no intervalo (a, b) por outra função a que corresponda uma expressão analítica válida em todo o intervalo.

No entanto, considerando o intervalo subdividido em subintervalos, a função poderá ser razoàvelmente aproximada, por exemplo, por uma poligonal, isto é, por uma função cuja expressão analítica mude de subintervalo para subintervalo (fig. 12).

3.3 — Descrição do método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos consta dos seguintes passos:

a) subdivisão da estrutura em subdomínios (elementos finitos)

b) discretização do campo dentro de cada elemento

c) compatibilização dos elementos entre si.

Os programas de cálculo automático que permitem a análise da estrutura pelo método dos elementos finitos fixam uma forma genérica para os elementos (triangular, rectangular, etc.), e o modo como os elementos são compatibilizados.

O utilizador que disponha de um certo programa não tem pois mais que subdividir o domínio em subdomínios, cuja forma seja consentida pelo programa, e definir as solicitações exteriores.

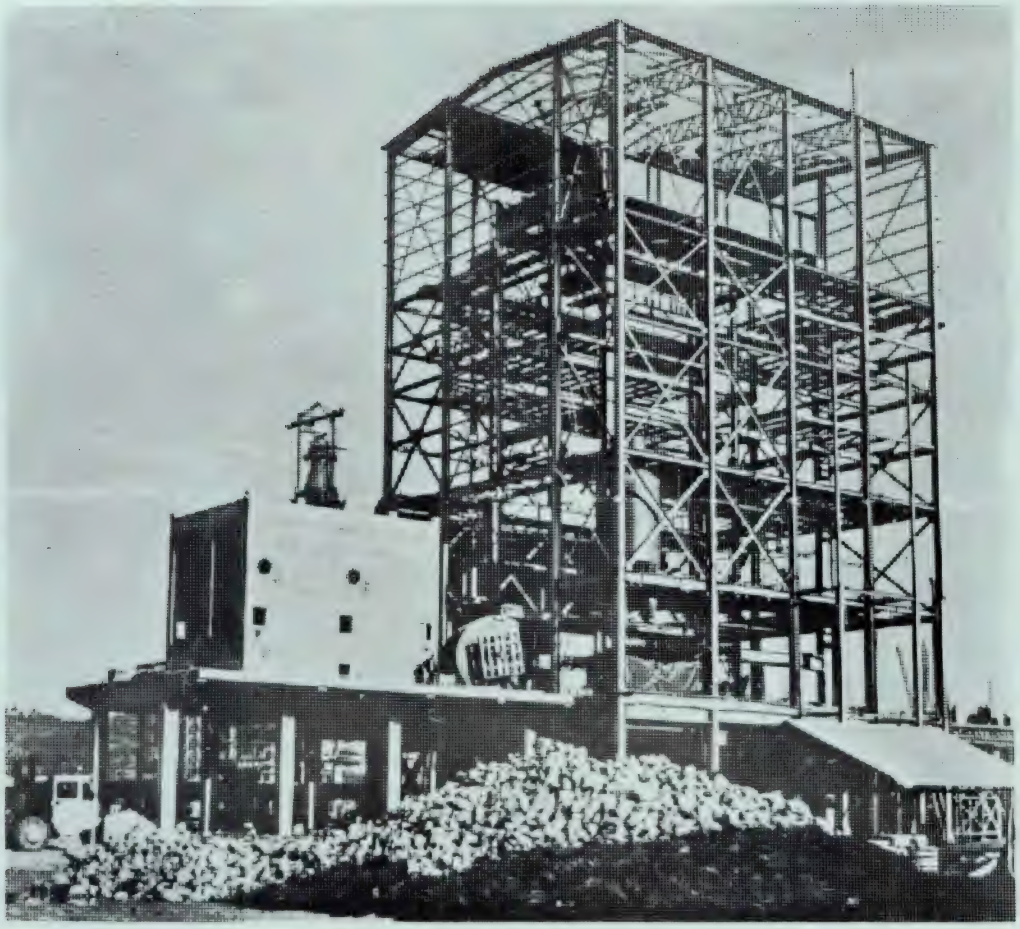
MAGUE

Guindastes de 3t x 16m e de 12t x 16m encomendados pela Junta Autónoma do Porto de Setúbal para o apetrechamento do seu Porto

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL



CELULOSE DO TEJO
Estrutura do edifício da caldeira de recuperação.

- ALTERNADORES (de potência superior a 2000 kVA), COMPENSADORES SÍNCRONOS, MOTORES DE GRANDE POTÊNCIA (fabricação parcial).
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS QUÍMICAS E PETROQUÍMICAS
  Tubagens, tremonhas, reactores, permutadores, cisternas, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS PETROLÍFERAS
  Torres, balões, permutadores, filtros, aerorefrigerantes, tubagens, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS CIMENTEIRAS
  Fornos, moinhos, separadores, arrefecedores, etc.
- RESERVATÓRIOS
  De tecto fixo e tecto flutuante, de alta e baixa pressão. Para gases liquefeitos. Gasómetros
- EQUIPAMENTOS DE MANUTENÇÃO E TRANSPORTE
  Elevadores de alcatruzes, elevadores de palhetas, transportadores de tela metálica e de borracha, contentores, etc.
- ESTRUTURAS METÁLICAS
  Pontes, cimbres, coberturas, pisos, edifícios industriais, etc.
- MONTAGENS PESADAS

SEPSA SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES ELECTRO-MECÂNICAS, S.A.R.L.
APARTADO 8 • LEÇA do BAILIO • TELEX SEPSA P 2616

3.4 — Exemplificação para a elasticidade plana

3.4.1 — *Equações da elasticidade plana*

O método pode ser aplicado na análise de qualquer tipo de estrutura. Será porém ilustrado com uma aplicação à elasticidade plana.

As equações da elasticidade plana são as seguintes:

— equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0 \end{cases} \tag{46}$$

— relações deformações — deslocamentos:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ 2\,\varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{cases} \tag{47}$$

— relações tensões — deformações (tensões planas):

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{2\,Ge}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11} + \nu\,\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} = \dfrac{2\,Ge}{1-\nu}\,(\varepsilon_{22} + \nu\,\varepsilon_{11}) \\ \sigma_{12} = 2\,Ge\,\varepsilon_{12} \end{cases} \tag{48}$$

Estas equações podem escrever-se sob uma forma simbólica muito conveniente desde que se considerem os vectores

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\,\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{49-52}$$

Atendendo a que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, tem-se então, efectivamente, em vez de (46), (47) e (48),

$$\mathbf{E}\,\mathbf{s} = \mathbf{X} \tag{53}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\,\mathbf{u} \tag{54}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\,\mathbf{e} \tag{55}$$

em que **E** e **D** são matrizes de operadores diferenciais,

$$\mathbf{E} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \tag{56}$$

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{0}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \tag{57}$$

e **H** é a matriz simétrica

$$\mathbf{H} = \frac{2\,Ge}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{58}$$

Na fronteira, as equações de equilíbrio são, como se sabe,

$$\begin{aligned} \sigma_{11}\,n_1 + \sigma_{21}\,n_2 &= \sigma_1 \\ \sigma_{12}\,n_1 + \sigma_{22}\,n_2 &= \sigma_2 \end{aligned} \tag{59}$$

ou, sob forma simbólica

$$\mathbf{p} = \mathbf{N}\,\mathbf{s} \tag{60}$$

sendo

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \tag{61}$$

e

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \tag{62}$$

O interesse da notação introduzida reside sobretudo na sua generalidade. É com efeito possível escrever sob esta forma as equações de todos os modelos analíticos da Teoria de Estruturas.

3.4.2 — *Expressão da matriz de rigidez*

O tipo de um elemento define-se pela sua forma genérica e pela família dos campos admissíveis no interior do elemento.

Esta família define-se em termos de um certo número finito de parâmetros, ditos deslocamentos generalizados, e é em termos destes deslocamentos generalizados que se escrevem as condições reduzidas de compatibilidade que definem o modo de interacção dos vários elementos.

Seja pois $\mathbf{q}^e$ o vector dos deslocamentos generalizados. Os campos de deslocamentos consentidos no interior do elemento são do tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^e \mathbf{q}^e \tag{63}$$

em que $\mathbf{L}^e$ é uma matriz cujos elementos dependem das coordenadas. Para cada vector $\mathbf{q}^e$ tem-se assim um certo campo de deslocamentos.

A expressão da energia de deformação de um elemento é

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{e} \, d\Omega \tag{64}$$

em que Ω^e é o subdomínio correspondente ao elemento.

Introduzindo (54) e (55), vem

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \mathbf{H} (\mathbf{D}\mathbf{u}) \, d\Omega \tag{65}$$

Introduzindo (63), tem-se finalmente

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \tag{66}$$

em que a matriz simétrica

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{D}\mathbf{L}^e)^T \mathbf{H} (\mathbf{D}\mathbf{L}^e) \, d\Omega \tag{67}$$

se diz matriz de rigidez do elemento. A matriz de rigidez conserva assim a sua função de matriz simétrica da forma quadrática da energia de deformação.

3.4.3 — *Exemplo*

Seja por exemplo um elemento triangular com campos de deslocamentos lineares, isto é, da forma

$$\begin{cases} u_1 = C_1 + C_2 X_1 + C_3 X_2 \\ u_2 = C_4 + C_5 X_1 + C_6 X_2 \end{cases} \tag{68}$$

(68) é equivalente a

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_1 & X_2 \end{bmatrix} \mathbf{C}^e \tag{69}$$

em que $\mathbf{C}^e$ é o vector dos coeficientes C_1, $C_2, \ldots C_6$.

Tomem-se agora para deslocamentos generalizados os deslocamentos dos vértices, isto é, (ver fig. 13),

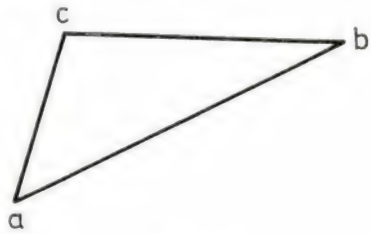


Fig. 13

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \\ u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} \tag{70}$$

Em virtude de (65), vem

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{ea} \\ \mathbf{M}^{eb} \\ \mathbf{M}^{ec} \end{bmatrix} \mathbf{C}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{C}^e \tag{71}$$

em que as matrizes $\mathbf{M}^{ea}$, $\mathbf{M}^{eb}$ e $\mathbf{M}^{ec}$ se obtêm particularizando para os nós a, b, e c a matriz $\mathbf{M}^e$ (cujos elementos dependem das coordenadas).

Observa-se que $\mathbf{N}^e$ é uma matriz quadrada de sexta ordem.

Tira-se de (71)

$$C^e = N^{e^{-1}} q^e \tag{72}$$

pelo que

$$u = M^e N^{e^{-1}} q^e \tag{73}$$

Comparando com (63), vê-se que

$$L^e = M^e N^{e^{-1}} \tag{74}$$

Tem-se tudo o que é necessário para calcular a matriz de rigidez através da fórmula (67).

3.4.4 — *Condições reduzidas de compatibilidade*

As condições reduzidas de compatibilidade definem o modo de interacção dos vários elementos.

Exprimem-se como se disse em termos dos deslocamentos generalizados.

Os deslocamentos generalizados são em regra as componentes de deslocamento de certos pontos da fronteira dos elementos que se dizem nós ou pontos nodais. As condições reduzidas de compatibilidade afirmam que os nós coincidentes de elementos adjacentes permanecem coincidentes após a deformação.

Seja por exemplo uma estrutura constituída por três elementos (fig. 14):

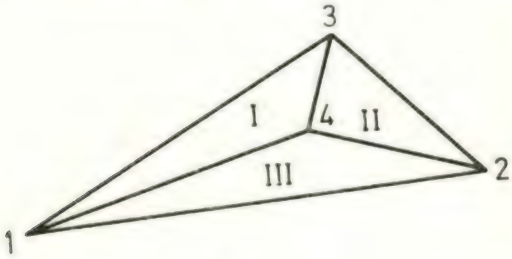


Fig. 14

Seja u^{I1} o vector dos deslocamentos do nó 1 considerado como pertencente ao elemento I, etc.

As condições reduzidas de compatibilidade são

$$\begin{cases} u^{I1} = u^{III1} = u^1 \\ u^{II2} = u^{III2} = u^2 \\ u^{I3} = u^{II3} = u^3 \\ u^{I4} = u^{II4} = u^{III4} = u^4 \end{cases} \tag{75}$$

Considere-se agora o vector

$$q = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{bmatrix} \tag{76}$$

O vector q diz-se vector dos deslocamentos generalizados da estrutura. As equações (75) podem tomar a forma.

$$q^I = \begin{Bmatrix} u^{I1} \\ u^{I4} \\ u^{I3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} q = A^I q \tag{77}$$

$$q^{II} = \begin{Bmatrix} u^{II4} \\ u^{II2} \\ u^{II3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} q = A^{II} q \tag{78}$$

$$q^{III} = \begin{Bmatrix} u^{III1} \\ u^{III2} \\ u^{III4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q = A^{III} q \tag{79}$$

As condições de compatibilidade são pois do tipo

$$q^e = A^e q \tag{80}$$

exactamente como acontece no caso das estruturas reticuladas.

3.4.5 — *Análise do sistema*

As equações

$$Q^e = K^e q^e \tag{81}$$

definem as forças generalizadas associadas com os deslocamentos q^e.

Tem-se pois

$$\delta U^e = q^{e^T} K^e \delta q^e = \tfrac{1}{2} Q^{e^T} \delta q^e \tag{82}$$

Por outro lado, o trabalho das forças exteriores é

$$\delta \tau = \int_\Omega X^T \delta u \, d\Omega + \int_F p^T \delta u \, dF \tag{83}$$

em que F é a fronteira do domínio Ω correspondente à estrutura.

(83) pode tomar a forma

$$\delta\tau = \sum_e \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{X}^T \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{F^e \cap F} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} \, dF \right] \quad (84)$$

em que $F^e \cap F$ designa a intersecção da fronteira de cada elemento com a fronteira da estrutura.

Introduzindo (63), vem:

$$\delta\tau = \sum_e \left[\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^e \, d\Omega + \int_{F^e \cap F} \mathbf{p}^T \mathbf{L}^e \, dF \right) \delta \mathbf{q}^e = \right.$$

$$= \sum_e \left[\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^e \, d\Omega + \int_{F^e \cap F} \mathbf{p}^T \mathbf{L}^e \, dF \right) \mathbf{A}^e \right] \mathbf{q} \quad (85)$$

Fazendo

$$\mathbf{Q} = \sum_e \left[\mathbf{A}^{e^T} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{L}^{e^T} \mathbf{X} \, d\Omega + \int_{F^e \cap F} \mathbf{L}^{e^T} \mathbf{p} \, dF \right) \right] \quad (86)$$

tem-se pois

$$\delta\tau = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (87)$$

Por outro lado

$$\delta\tau = \delta U = \sum_e \delta U^e \quad (88)$$

Logo

$$\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} = \sum_e \mathbf{Q}^{e^T} \delta \mathbf{q}^e = \left(\sum_e \mathbf{Q}^{e^T} \mathbf{A}^e \right) \delta \mathbf{q} \quad (89)$$

Sendo $\delta \mathbf{q}$ arbitrário, vem

$$\mathbf{Q} = \sum_e \mathbf{A}^{e^T} \mathbf{Q}^e \quad (90)$$

que representa as equações de equilíbrio da teoria.

Dispõe-se assim do seguinte conjunto de equações inteiramente análogas às que se obtiveram para as estruturas reticuladas.

equilíbrio: $$\mathbf{Q} = \sum_e \mathbf{A}^{e^T} \mathbf{Q}^e \quad (91)$$

compatibilidade: $$\mathbf{q}^e = \mathbf{A}^e \mathbf{q} \quad (92)$$

forças-deslocamentos: $$\mathbf{Q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad (93)$$

A eliminação dos $\mathbf{Q}^e$ (método dos deslocamentos) leva imediatamente, como no caso das estruturas reticuladas, a

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (94)$$

em que

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}^{e^T} \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e \quad (95)$$

3.5 — Aplicação do método aos restantes modelos analíticos.

As equações simbólicas apresentadas em 3.4.1 são, como se afirmou, válidas em todos os modelos analíticos da Teoria das Estruturas. Mantêm-se efectivamente na teoria das placas, das cascas, das barras, embora mude o significado e o número dos elementos dos vectores **s**, **e**, **u** e **p** e as expressões dos elementos das matrizes **H**, **D**, **E** e **N**.

A expressão (67) da matriz de rigidez de um elemento e (86) do vector das forças exteriores actuantes na estrutura foram estabelecidas a partir das equações simbólicas, pelo que se mantêm também em todos os modelos analíticos.

3.6 — Aplicações às peças lineares

A matriz de rigidez de uma barra recta de secção constante foi determinada em 2.2. Deseja-se agora determinar a mesma matriz de rigidez considerando a barra como elemento finito.

Há que discretizar o campo no interior da barra, isto é, exprimi-lo em termos dos deslocamentos generalizados, como foi feito em 3.4.2 para a elasticidade plana.

Acontece porém que, enquanto no caso da elasticidade plana essa discretização era aproximada, no caso da barra o campo de deslocamentos pode exprimir-se rigorosamente em termos dos deslocamentos u_2^e e u_2^d e das rotações θ^e e θ^d das extremidades.

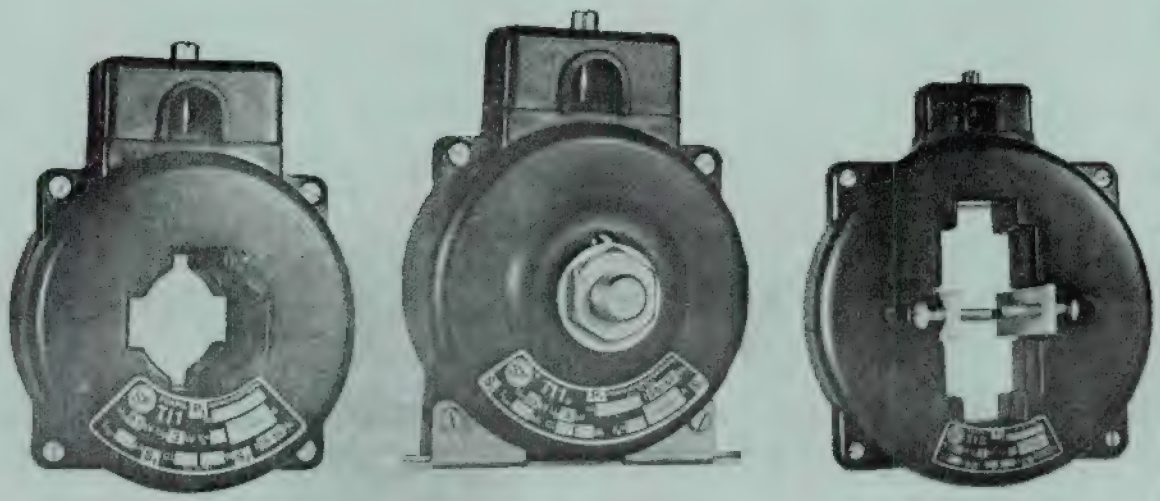
Tem-se

$$u_2 = \alpha_1 u_2^e + \alpha_2 \theta^e + \alpha_3 u_2^d + \alpha_4 \theta^d \quad (96)$$

FRAPIL

CONSTRUÇÕES E MONTAGENS ELÉCTRICAS

SARL



transformadores de intensidade

SF

núcleo magnético toroidal • perdas extra-reduzidas • vasta gama de utilizações

caixas de polipropileno antichoque

licença | SACI

SEDE E INSTALAÇÕES FABRIS

CAIS DE SÃO ROQUE
APARTADO 20
TELEFONE 23071 2
AVEIRO

DELEGAÇÃO NO SUL

RUA CASTILHO
38, r/c.-dt.
TELEFONE 5 25 28
LISBOA-1

042.71:2575

DESPOEIRAGEM

FILTROS TECIDOS EM PEÇAS, PANOS, SACOS, MANGAS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.741121
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

em que

$$\alpha_1 = \frac{2\,x_1^3}{L^3} - \frac{3\,x_1^2}{L^2} + 1 \qquad (97)$$

$$\alpha_2 = \frac{x_1^3}{L^2} - 2\,\frac{x_1^2}{L} + x_1 \qquad (98)$$

$$\alpha_3 = -\frac{2\,x_1^3}{L^3} + \frac{3\,x_1^2}{L^2} \qquad (99)$$

$$\alpha_4 = \frac{x_1^3}{L^2} - \frac{x_1^2}{L} \qquad (100)$$

Desde que não se considere o trabalho da barra à tracção, o vector dos deslocamentos generalizados da barra é

$$q^e = \begin{Bmatrix} u_2^e \\ \theta^e \\ u_2^d \\ \theta^d \end{Bmatrix} \qquad (101)$$

pelo que, comparando (96) com (63), se conclui que

$$L^e = [\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\,] \qquad (102)$$

A energia de deformação é

$$2\,U^e = \int_0^L (u_2'')^2\,E\,I\,dx_1 =$$

$$= E\,I\,q^{eT} \int_0^L \begin{Bmatrix} \alpha_1'' \\ \alpha_2'' \\ \alpha_3'' \\ \alpha_4'' \end{Bmatrix} [\,\alpha_1''\ \alpha_2''\ \alpha_3''\ \alpha_4''\,]\,dx_1\,q^e \qquad (103)$$

em que as linhas denotam derivações em ordem a x_1.

Conclui-se de (103) que a matriz de rigidez (matriz da forma quadrática da energia de deformação) é:

$$K^e = E\,I \begin{bmatrix} \int_0^L (\alpha_1'')^2\,dx_1 & \int_0^L \alpha_1''\,\alpha_2''\,dx_1 & \int_0^L \alpha_1''\,\alpha_3''\,dx_1 & \int_0^L \alpha_1''\,\alpha_4''\,dx_1 \\ \int_0^L \alpha_2''\,\alpha_1''\,dx_1 & \int_0^L (\alpha_2'')^2\,dx_1 & \int_0^L \alpha_2''\,\alpha_3''\,dx_1 & \int_0^L \alpha_2''\,\alpha_4''\,dx_1 \\ \int_0^L \alpha_3''\,\alpha_1''\,dx_1 & \int_0^L \alpha_3''\,\alpha_2''\,dx_1 & \int_0^L (\alpha_3'')^2\,dx_1 & \int_0^L \alpha_3''\,\alpha_4''\,dx_1 \\ \int_0^L \alpha_4''\,\alpha_1''\,dx_1 & \int_0^L \alpha_4''\,\alpha_2''\,dx_1 & \int_0^L \alpha_4''\,\alpha_3''\,dx_1 & \int_0^L (\alpha_4'')^2\,dx_1 \end{bmatrix} \qquad (104)$$

Introduzindo (97), (98), (99) e (100), obtém-se

$$K^e = \begin{bmatrix} 12\,\frac{E\,I}{L^3} & 6\,\frac{E\,I}{L^2} & -12\,\frac{E\,I}{L^3} & 6\,\frac{E\,I}{L^2} \\ 6\,\frac{E\,I}{L^2} & 4\,\frac{E\,I}{L^2} & -6\,\frac{E\,I}{L^2} & 2\,\frac{E\,I}{L} \\ -12\,\frac{E\,I}{L^3} & -6\,\frac{E\,I}{L^2} & 12\,\frac{E\,I}{L^3} & -6\,\frac{E\,I}{L^2} \\ 6\,\frac{E\,I}{L^2} & 2\,\frac{E\,I}{L} & -6\,\frac{E\,I}{L^2} & 4\,\frac{E\,I}{L} \end{bmatrix} \qquad (105)$$

São exactamente os mesmos coeficientes de rigidez que tinham sido obtidos em 2.2.

Quanto às forças exteriores, dado que a estrutura se reduz à barra, a sua expressão é

$$Q = \int_{\Omega^e} L^{eT}\,X\,d\Omega + \int_{F^e \cap F} L^{eT}\,p\,dF \qquad (106)$$

Supondo que a carga é uniformemente distribuída, de densidade p, $X = p$.

Tem-se pois

$$Q = \int_0^L \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} p\,d\Omega = \begin{Bmatrix} p\,\frac{L}{2} \\ p\,\frac{L^2}{12} \\ p\,\frac{L}{2} \\ -p\,\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix} \qquad (107)$$

As forças generalizadas exteriores são pois agora as reacções e momentos de encastramento. Lembra-se que se chegou à mesma conclusão em 2.9, raciocinando com forças de fixação.

Conclui-se pois que, em virtude de a equação (96) ser exacta, as fórmulas (67) e (86) conduzem a expressões exactas para a matriz de rigidez e forças exteriores. Exactos são portanto ainda os resultados finais da análise fornecidos pelo método dos elementos finitos, o qual de resto não é mais, repete-se, que uma generalização dos métodos clássicos de análise das estruturas reticuladas.

Os resultados deixam de ser exactos desde que se saia fora do domínio da teoria das peças lineares, pois que a equação (96) deixa de ser exacta, isto é, a discretização só se consegue por intermédio de aproximações.

3.7 — Critérios gerais

O tipo de elemento considerado para a elasticidade plana está longe de ser o único possível. Podem ter-se por exemplo elementos rectangulares ou elementos triangulares dentro do qual o campo tenha expressão quadrática e não linear.

O critério mais importante para decidir sobre a admissibilidade de um determinado tipo de elemento é o da convergência para a solução exacta: os valores dos deslocamentos e tensões obtidos a partir de análises baseadas em elementos de dimensões sucessivamente decrescentes devem tender para a solução exacta quando essas dimensões tenderem para zero.

A convergência para a solução exacta obriga a que a equação de discretização (63) tenha uma certa forma. Demonstra-se que, essa forma deve ser tal que todos os estados de deformação homogénea sejam possíveis dentro do elemento, assim como todos os movimentos de corpo rígido. No caso da elasticidade plana, isso obriga a que as expressões das várias componentes de deslocamento contenham um termo constante arbitrário e termos lineares afectados de coeficientes também arbitrários. É o que acontece no exemplo apresentado em 3.4.3, em que as expressões dos deslocamentos só contêm esses termos. No caso da teoria das placas, em que as deformações são as curvaturas (segundas derivadas do deslocamento transversal), a expressão do deslocamento transversal deve conter todos esses termos e ainda os termos quadráticos também multiplicados por coeficientes arbitrários.

Outro critério que tem sido utilizado é o da compatibilidade. Tem-se procurado que as condições reduzidas de compatibilidade impliquem a compatibilidade completa, isto é, a continuidade dos deslocamentos através das fronteiras dos elementos. Isso consegue-se no caso do exemplo apresentado em 3.4.3, pois que, dependendo os deslocamentos linearmente das coordenadas, mantêm-se rectos os lados dos triângulos. Basta portanto garantir a igualdade dos deslocamentos de cada par de nós coincidentes de elementos adjacentes (condições reduzidas de compatibilidade) para que os lados comuns dos elementos adjacentes se mantenham colados após a deformação.

4 — CONCLUSÕES

A Teoria de Estruturas moderna apresenta-se livre dos defeitos que caracterizavam a teoria antiga.

Para um engenheiro, interessa sobretudo ter bem presente que existe um método susceptível de tratar qualquer tipo de estrutura, desde que disponha de programas de cálculo automático adequados. Em presença desses programas, a tarefa do engenheiro reduz-se essencialmente a subdividir a estrutura em elementos do tipo catalogado e em interpretar os resultados fornecidos pelo computador.

BIBLIOGRAFIA

ÅSPLUND, S. O. — *Structural Mechanics: Classical and Matrix Methods* — Prentice-Hall, trand, Co., Inc.
Juntando o antigo e o recente, esta obra sueca inclui, além disso, apreciáveis introduções históricas dos vários assuntos tratados.

HALL, A. S.; WOODHEAD, R. W — *Frame Analysis.*
Uma das melhores obras dedicadas à análise matricial de estruturas reticuladas. Notável ainda pelos magníficos exercícios que acompanham o texto.

LIVESLEY, R. K. — *Matrix Methods of Structural Analysis* — Pergamon, 1964.
O livro para quem queira iniciar-se na análise matricial das estruturas reticuladas.

OLIVEIRA, E. R. ARANTES — *Introdução à Teoria das Estruturas* — Lisboa, Ed. do autor, 1966.
Uma síntese da Teoria das Estruturas tornada possível pelas recentes contribuições.

PRZEMINIECKI, J. S. — *Theory of Matrix Structural Analysis* — Mc Graw-Hill 1968.
Este livro constitui, com o de Zienkiewicz, uma das duas únicas obras que apresentam uma exposição do método dos elementos finitos.

ZIENKIWICZ, O. C; CHEUNG, Y. K. — *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics* — — Mc Graw-Hill, 1967.
O primeiro livro totalmente dedicado ao método dos elementos finitos. Súmula da grande experiência dos seus autores, é, apesar de deficiente no plano teórico, a obra fundamental para quem queira estudar elementos finitos.

C. D. U. 621.315.611

NOVA CONCEPÇÃO DO ESQUEMA EQUIVALENTE DE UM DIELÉCTRICO SÓLIDO COM CAVIDADES

Por HERMÍNIO DUARTE-RAMOS
Engenheiro Electrotécnico (I.S.T.)
Colaborador Científico do Schering-Institut (T.U. Hannover)
Bolseiro da U.L. (Angola)

RESUMO

Critica-se o esquema equivalente clássico usado no estudo das descargas parciais e elabora-se fisicamente um mecanismo de descarga que conduz ao novo esquema equivalente, o qual permite calcular com exactidão as grandezas caracteristicas do fenómeno das descargas parciais.

SYNOPSIS

The classic diagram used in studies of partial discharges in a void is criticized. A new diagram is proposed, which is based on a physical mechanism of discharges and which makes possible the accurate calculation of the main characteristics of corona discharges.

1. INTRODUÇÃO

O envelhecimento dos materiais isolantes por processos eléctricos tem como causa fundamental a heterogeneidade dos dieléctricos, através de reduzidas porções de materiais estranhos no seu seio, que provocam descargas eléctricas intermitentes designadas por descargas parciais. Em geral nos isolantes constituídos por camadas, que se usam nos equipamentos eléctricos, formam-se cavidades (fig. 1) preenchidas por ar onde, a partir de determinado valor da tensão aplicada, se desenvolvem descargas eléctricas que vão deteriorando o respectivo dieléctrico ao longo do tempo.

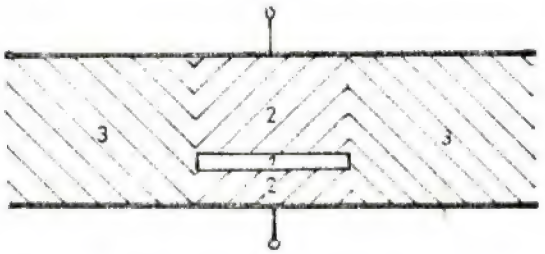


Fig. 1 — Dieléctrico com uma cavidade: região 1 — cavidade; região 2 — dieléctrico em série com a cavidade; região 3 — dieléctrico em paralelo com 1 e 2.

Têm sido publicados diversos trabalhos sobre a análise matemática do fenómeno quase sempre a partir do chamado esquema simplificado, embora por vezes se apresentem esquemas eléctricos diferentes para esclarecer qualitativamente específicos detalhes do fenómeno físico.

O novo esquema que se propõe com base na interpretação física das descargas parciais conduz a expressões teóricas que satisfazem aos resultados experimentais divulgados.

2. ESQUEMA SIMPLIFICADO

Em 1928 W. Burstyn [1] ao estudar as perdas dieléctricas em materiais isolantes constituídos por camadas esboçou pela primeira vez um esquema equivalente para análise das descargas parciais, que lhe permitiu justificar qualitativamente o aumento do factor de dissipação devido ao aparecimento desse fenómeno quando o campo eléctrico na cavidade excede um certo valor. No seu raciocínio esteve presente a aplicabilidade das leis de descarga eléctrica no ar entre eléctrodos metálicos, nomeadamente a lei de Paschen, às descargas no meio gasoso das cavidades inseridas no dieléctrico, conclusão que em 1919 se revela no trabalho de F. Dubsky [2].

O esquema equivalente (fig. 2-b) é formado pela capacidade C_1 da cavidade e pela capacidade complementar C_2 em série relativa à capacidade do dieléctrico entre a cavidade e os eléctrodos. Em paralelo com a capacidade da cavidade um disruptor representa a existência de descargas quando a tensão aos seus terminais atinge o valor de disrupção.

Contudo já em 1922 Delafield du Bois [3] se serviu nos seus cálculos de um esquema que constitui o primeiro passo para o esquema anteriormente descrito não atendendo ao disruptor isto

é, abstraindo da existência das descargas parciais (fig. 2-a).

A. Gemant e W. v. Philippoff em 1932 [4] definiram o chamado esquema simplificado, já hoje designado de clássico na análise das descargas parciais, pela consideração da capacidade C_3 relativa à restante parte do dieléctrico sem cavidades em paralelo com a série de C_1 e C_2 (fig. 2-c).

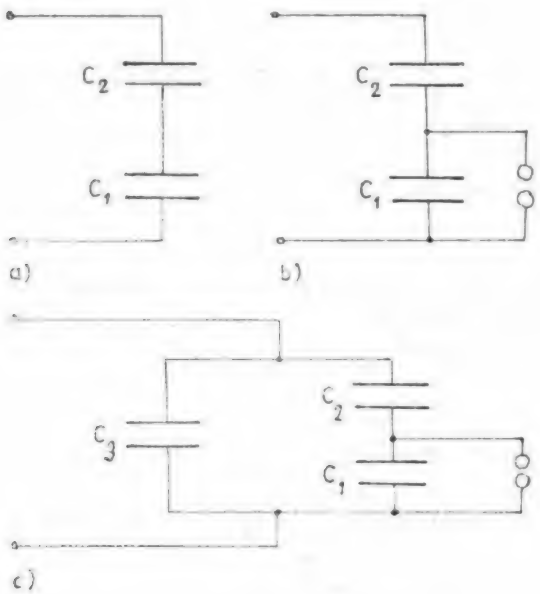


Fig. 2 — Esquema simplificado
a) Segundo Delafield du Bois (1922);
b) Devido a Burstyn (1928);
c) Conforme Gemant e v. Philippoff (1932).

Este esquema tem servido de base para ilustrar o fenómeno e calcular o número de descargas por segundo (frequência de repetição de descargas), a intensidade de corrente e a potência aparentes (que se manifestam no circuito exterior).

A investigação das descargas parciais em dieléctricos sólidos, em especial com cavidades artificiais, tem contudo revelado particularidades que este esquema não esclarece, o que lhe confere a designação de esquema simplificado.

Imediatamente se observa que o esquema não atende às dissipações devidas à condutividade e não considera a existência de uma corrente transversal na superfície da cavidade. Além disso constata-se uma contradição entre a experiência e a teoria desenvolvida a partir do esquema no que se refere ao número de descargas por período da tensão aplicada: em geral este número é superior ao calculado teóricamente a partir do esquema. O facto é consequência de uma segunda contradição: a tensão da cavidade correspondente ao apagamento de cada descarga não é forçosamente nula, conforme o esquema simplificado exige.

3. INFLUÊNCIA DA CONDUTIVIDADE

No estudo do fenómeno da ionização nos dieléctricos conceberam em 1926 C. L. Dawes e P. L. Hoover [5] um esquema que inclui a influência das resistências (R_1 e R_2) relativas à condutividade, para explicar as perdas dieléctricas, em derivação com as capacidades da cavidade e do dieléctrico (fig. 3-a), sem a concepção do disruptor em paralelo com C_1.

Na literatura americana encontra-se em 1958 o raciocínio de E. C. Rogers [6] no cálculo da tensão de inserção das descargas (fig. 3-b) onde desprezou o efeito da resistência do dieléctrico e deu relevo à condutividade da cavidade. Observa-se todavia que a descarga curto-circuito R_1 eliminando-lhe o efeito.

O aparecimento de maior número de descargas que o indicado pelo esquema equivalente simplificado foi explicado em 1965 por B. Heller e J. Chládek [7] através da acção da resistência R_2 do volume do dieléctrico (fig. 3-c) sobre o condensador C_2 quando a tensão aumenta, provocando uma subida da tensão em C_1 e por consequência um incremento do número de descargas.

Ensaios revelaram a possibilidade de surgirem apenas duas descargas durante um período da tensão. Porém o mínimo valor possível indicado pelo esquema simplificado (para $V = 2V_1$ na expressão (1) a seguir apresentada) é de quatro. No sentido de dar explicação a esta ocorrência idealizaram em 1963 A. Veverka e A. Hon [8] um esquema (fig. 3-d) em que intervém o efeito da resistência superficial entre as superfícies da cavidade (R_1) e a resistência interna do dieléctrico entre as superfícies da cavidade e os eléctrodos (R_2), tendo interpretado matemàticamente este efeito como uma alteração do andamento da tensão aplicada à cavidade durante os intervalos de tempo sem descarga, que em vez de sinusoidal pura terá uma componente exponencial cuja constante de tempo é definida por R_1, R_2, C_1 e C_2; assim quando uma descarga se verifica por

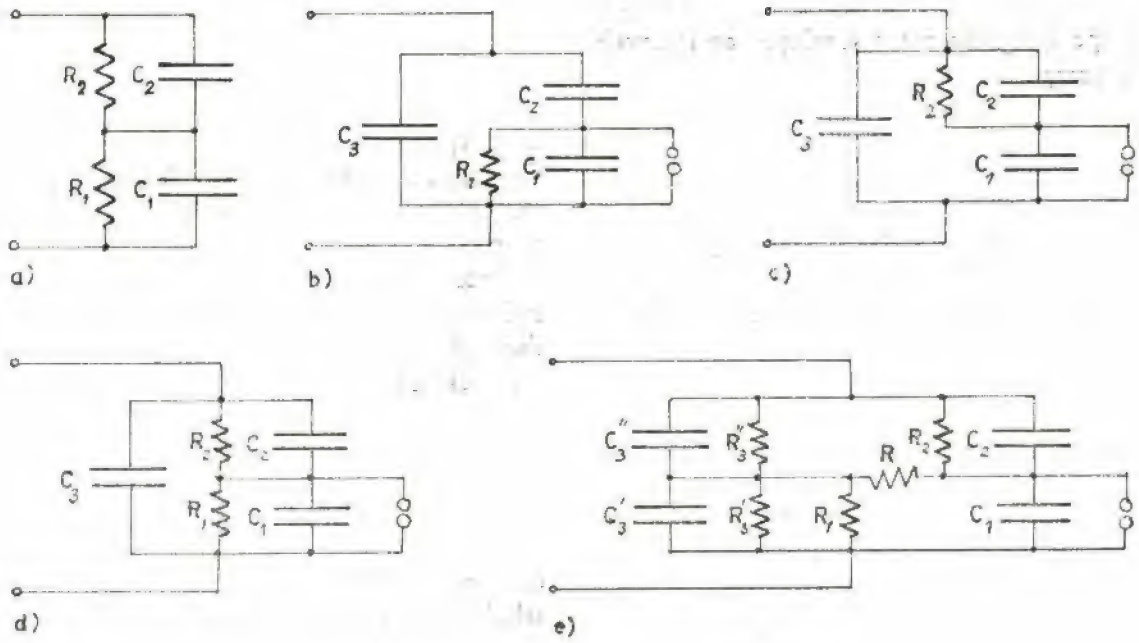


Fig. 3 — Esquema equivalente considerando o efeito da condutividade
a) No raciocínio de C. L. Dawes e Hoover (1926);
b) No pensamento de E. C. Rogers (1958);
c) Devido a B. Heller e J. Chládek (1965);
d) Por A. Veverka e A. Hon (1963);
e) Segundo V. Mòdoni (1962).

exemplo no instante do pico positivo da tensão aplicada, a tensão na cavidade decai instantâneamente do valor de ignição até ao valor de apagamento (por mecanismo não explicado) e depois sofre um deslocamento tal que vai ocupar aproximadamente o andamento da tensão sinusoidal que existiria se não houvesse descarga, verificando-se portanto a segunda descarga no pico negativo seguida de idêntico processo de evolução.

Além das resistências de condutividade finita, conforme os elementos capacitivos a que estão ligados, indicou em 1962 V. Mòdoni [9] ainda a resistência transversal R relativa à corrente transversal sobre a superfície da cavidade (fig. 3-e).

Bàsicamente porém em todos estes esquemas está o esquema clássico.

4. NÚMERO DE DESCARGAS POR PERÍODO

De acordo com o esquema simplificado a tensão de extinção das descargas na cavidade terá o valor zero, correspondente à descarga total de C_1 sobre o plasma formado, pois fìsicamente uma vez iniciada a disrupção aos terminais de um condensador, se não intervêm outros factores, o condensador descarregar-se-á totalmente.

Em 1963 W. Boening [10] admitiu que além da cavidade também uma certa zona do dieléctrico à sua volta participa no processo de descarga (fig. 4-a). Uma capacidade C_4 em paralelo com C_1 por intermédio de uma resistência R_4 representa o efeito da vizinhança dieléctrica e uma capacidade C_5 traduz a restante parte do dieléctrico em série com C_4. A resistência R_1 corresponde à resistência do canal de descarga. A corrente transversal que se manifesta durante a descarga percorre a resistência R_4 em consequência da diferença de potencial entre C_4 e C_1, quer dizer, quando não houver descarga C_4 e C_1 têm aos terminais a mesma tensão e a corrente através de R_4 é nula.

Com este esquema desenvolvido (fig. 4-b) Boening foi conduzido a uma tensão de restabelecimento V_r diferente de zero, devido à acção de C_4 sobre C_1, para a qual tende a tensão aos terminais de C_1 (fig. 4-c) depois de se anular (con-

dição de apagamento da descarga), num intervalo de tempo insignificante em relação ao intervalo sem descarga.

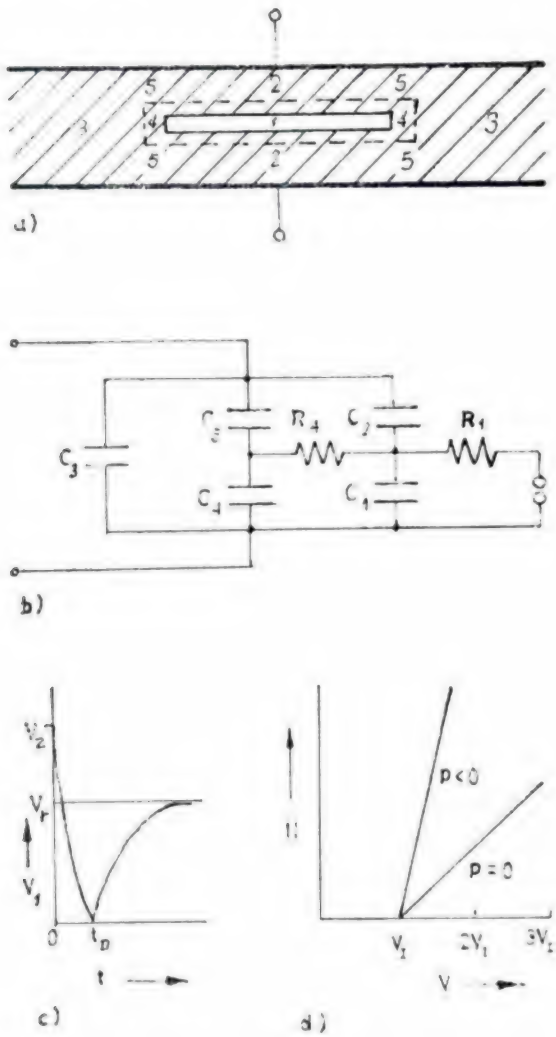


Fig. 4 — Esquema equivalente considerando a efeito do meio ambiente do dieléctrico, na concepção de Boening (1963)

a) Zona de influência do dieléctrico sobre as descargas;
b) Esquema desenvolvido;
c) Evolução da tensão aos terminais da cavidade durante e imediatamente após a descarga;
d) Número de descargas por período em função da tensão aplicada.

O pensamento de Boening teve origem no desacordo experimental do número N de descargas por período da tensão aplicada e o valor teórico previsto pelo esquema simplificado, que se deduz obedecer à equação

$$N = 4 \cdot \frac{V - V_I}{V_I} \qquad (1)$$

onde V_I é a tensão de inserção (valor eficaz ou de pico, conforme o valor de V), ou seja, a tensão aplicada para a qual se iniciam as descargas na cavidade.

Após vários ensaios com diversos materiais isolantes onde realizou cavidades de diferentes dimensões concluiu experimentalmente que a fórmula deverá ser

$$N = \frac{4}{1-p} \cdot \frac{V - V_I}{V_I} \qquad (2)$$

onde p é igual à relação entre as tensões de restabelecimento e de ignição das descargas

$$p = \frac{V_r}{V_z} \cdot \qquad (3)$$

A expressão (2) degenera na expressão (1) para $p = 0$, isto é, para $V_r = 0$, quer dizer, quando não houver efeito de vizinhança (fig. 4-d).

Realizando depois montagens segundo o seu esquema desenvolvido constatou para a função N (V) andamentos em harmonia com (2). Deste resultado salientamos de interessante que existe uma influência do ambiente circundante da zona em descarga.

5. MECANISMO DAS DESCARGAS

Hoje ainda não se encontra esclarecida a complexidade que constitui o processo das descargas parciais. Baseado porém nalguns resultados experimentais poder-se-ão elaborar as seguintes suposições:

1.ª *As descargas verificam-se em zonas restritas da cavidade*: métodos de sensibilização fotográfica (fig. 5) têm mostrado que as descargas se desenrolam em pequenas áreas [11], de preferência junto das superfícies longitudinais da cavidade, o que é explicado pela menor resistência apresentada (efeito da condutividade superficial);

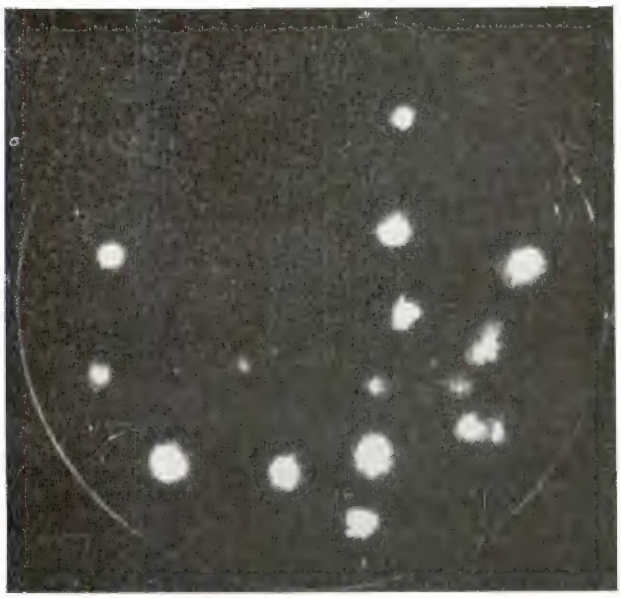


Fig. 5 — Descarga numa cavidade de 5 mm de diâmetro e 0,3 mm de profundidade em politene [11]

2.ª *O meio ambiente exerce acção sobre a evolução das descargas:* os iões positivos originados pelas descargas acumulam-se junto das superfícies da cavidade donde resulta uma carga espacial que irá participar no fenómeno;

3.ª *Não se realizam descargas simultâneas na mesma cavidade:* quando uma descarga se desenvolve constitui um curto-circuito na zona onde aparece, pelo que a tensão se reduz em toda a cavidade, impedindo assim o desenvolvimento de outras descargas nas restantes zonas da cavidade;

4.ª *Descargas sucessivas surgem em zonas distintas da cavidade:* após o apagamento da descarga numa dada zona a tensão na cavidade eleva-se devido ao aumento da tensão aplicada (admitida sinusoidal), mas as zonas que não foram sede de descarga atingem primeiramente a tensão de ignição em consequência da distribuição de cargas à superfície da cavidade no final da descarga anterior;

5.ª *A distribuição de cargas na superfície da cavidade é alterada* (fig. 6-c): devido ao curto-circuito provocado pela descarga as cargas eléctricas superficiais, originadas por fenómenos de polarização, acumuladas das ionizações antecedentes causadas por choque dos electrões acelerados pelo campo eléctrico aplicado com os átomos do gás contido na cavidade ou ainda provocadas por fotoionização (fig. 6-b), deslocam-se para a zona afectada (fig. 6-a);

6.ª *Durante a descarga surge uma corrente transversal na cavidade* em consequência da diferença de potencial entre a zona de descarga e as restantes zonas da cavidade e da existência de iões positivos distribuídos pela superfície.

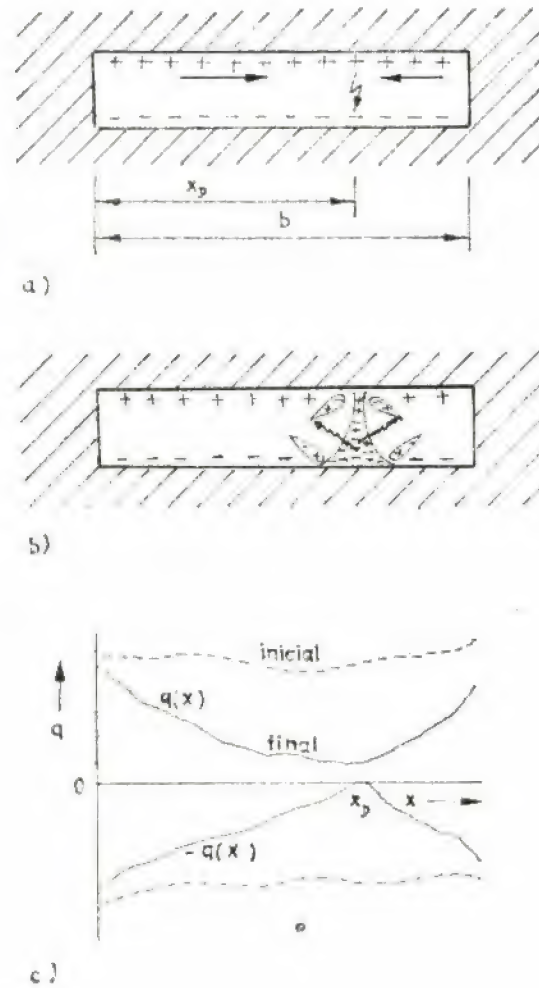


Fig. 6 — Esquematização das cargas eléctricas na cavidade

a) Cargas superficiais,
b) Canal de descarga e fotoionização;
c) Alteração da distribuição superficial de cargas.

6. NOVO ESQUEMA EQUIVALENTE

Com base nas considerações físicas anteriores concebe-se um esquema equivalente que traduz com aproximação satisfatória a complexidade de fenómenos desencadeados no processo das descargas parciais, que designaremos por esquema básico (fig. 7-b).

A capacidade C_D representa a zona em descarga e C_1 a restante capacidade da cavidade.

As capacidades C_2 e C_3 têm o mesmo significado do esquema simplificado. O disruptor simboliza de igual modo a realização das descargas. Quando a tensão aplicada à cavidade atinge o valor de ignição desencadeia-se a descarga, a tensão aos terminais de C_D reduz-se ràpidamente a zero e a descarga termina o processo. Entretanto C_1 e C_2 descarregam-se sobre o plasma através da resistência R_i na cavidade e transversalmente ao campo. Desta maneira a tensão aplicada a C_1 decresce mas não chega ao valor zero, pois quando C_D atinge a descarga total ainda C_1 apresenta uma certa tensão aos terminais, chamada tensão restante em virtude da queda de tensão em R_2 (fig. 7-c).

Note-se que a tensão restante V_r corresponde à que Boening denominou por tensão de restabelecimento mas não tem o mesmo carácter, pois as concepções de meio ambiente são distintas assim como a evolução da tensão. Para o esquema básico V_r significa o valor da tensão da restante parte da cavidade (exclusão da zona em descarga) para o qual a tensão do canal de descarga se anula e que portanto resta após o apagamento da descarga.

Quando $R_i = 0$ o esquema básico degenera no esquema simplificado, sendo então nula a tensão restante. Interpretamos este caso dizendo que não houve acção do meio ambiente sobre o canal de descarga o que, segundo o mecanismo elaborado, corresponde à não existência de carga espacial apreciável. Assume-se nestas condições que os iões positivos originados por cada descarga se recombinam com electrões, no intervalo de tempo entre duas descargas sucessivas.

Poder-se-ia conceber C_2 dividida em duas capacidades respectivamente em série com C_D e C_1 mas complicaria o esquema sem vantagem pois C_D é muito menor que C_1. De facto C_D pode-se desprezar no desenvolvimento matemático perante C_1. Nestas condições C_1 é pràticamente a capacidade da cavidade e o esquema toma a forma do esquema reduzido (fig. 7-d), onde não se indica o disruptor para acentuar que se trata de um circuito apenas válido durante o período de descarga. A resistência R_i em rigor inclui a resis-

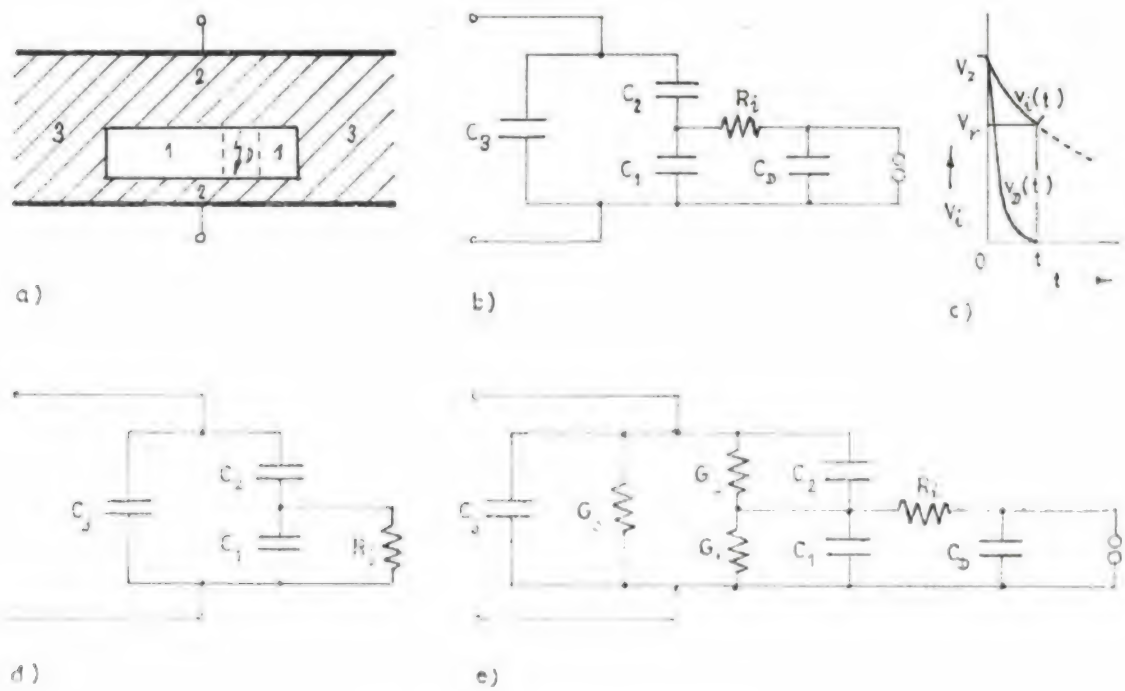


Fig. 7 — Novo esquema equivalente

a) Zonas da cavidade (D e 1) e do dieléctrico (2 e 3);
b) Esquema básico;
c) Evolução da tensão aplicada à cavidade durante a descarga;
d) Esquema reduzido;
e) Esquema completo.

tência do canal de descarga, sendo esta variável entre valores elevados no início e no final da descarga e com valores muito baixos durante a descarga.

Finalmente, se se atender às condutividades no dieléctrico e na cavidade, representadas pelas condutâncias G_1, G_2 e G_3, obter-se-á o esquema completo (fig. 7-e), que apenas tem valor qualitativo pois a consideração das perdas faz-se através do factor de dissipação.

Em resumo, o esquema reduzido permite o tratamento analítico do fenómeno das descargas parciais com notável simplicidade.

7. CONCLUSÕES

Fez-se a análise crítica dos esquemas equivalentes referidos na literatura sobre descargas parciais nos dieléctricos sólidos com cavidades. Através de um mecanismo físico do processo de descarga construíu-se um esquema que responde às objecções a que o esquema clássico está sujeito.

A confirmar a validade das hipóteses efectuadas poder-se-á deduzir, a partir do esquema proposto, a fórmula (2) induzida experimentalmente para o cálculo do número de descargas por período e calcular-se a intensidade de corrente e respectiva potência em perfeito acordo com os resultados dos ensaios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] — W. BURSTYN — Die Verluste in geschichteten Isolierstoffen; E T Z 35 (1928) p. 1289-1291.

[2] — F. DUBSKY - The dielectric strength of air films entrapped in solid insulation and a pratical application of the problem for alternator coils and cables; Trans. AIEE 381 (1919), p. 537-558.

[3] — D. du BOIS — The action and effect of moisture in a dielectric field; Trans. AIEE 41 (1922), p. 591-600.

[4] — A. GEMANT e W. v. PHILIPPOFF — Die Funkenstrecke mit Vorkondensator; Zeitschrift fuer technische Physik 13 (1932), p. 425-430.

[5] — C. L. DAWES e P. L. HOOVER — Ionisation studies in paper-insaluted cables-I; Trans. AIEE 45 (1926), p. 141-159.

[6] — E. C. ROGERS — The self-extinction of gaseous discharges in cavities in dielectrics; Proc. I E E 105 A (1958), p. 621-630.

[7] — B. HELLER e J. CHLÁDEK — Das kapazitive Ersatzschema fuer die Koronavorgaenge in festen Dielektrikum; Acta Technica CSSR (1965), p. 613-622.

[8] — A. VEVERK e A. HON — Das Ersatzchema fuer die inneren Entladungen im festen Dielektrikum; Acta Technica CSSR (1963), p. 509-523.

[9] — V. MODÒNI — Sull' invechiamento da ionizzazione dei dielettrici; L'Energia Eletrica (1962), p. 843-861.

[10] — W. BOENING — Luftgehalt und Luftspaltverteilung geschichter Dielektrika; Archiv fuer Elektrotechnik 48 (1963), p. 7-22.

[11] — J. H. MASON — The deterioration and breakdown of dielectrics resulting from internal discharges; Proc. IEE 98 I (1951), p. 44-59.

C. D. U. 621.311.5/91

ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

DEZEMBRO

— **Breve nota mensal**

Quanto às afluências, há a referir que as «afluências internas», por efeito das reduzidas precipitações, atingiram apenas 26 % da respectiva média; o caudal transitado em Miranda apresentou-se inferior ao caudal natural, por efeito de a albufeira de Ricobayo ter passado a armazenar, vindo o regime de afluências ao Douro a situar-se em cerca de 66 % da média; as afluências ao conjunto do sistema produtor foram apenas de cerca de 366 GWh, valor que corresponde a uma produtibilidade hidroeléctrica de 0,46 e tem uma probabilidade de ser excedido da ordem dos 88 %.

Em face das afluências desfavoráveis, intensificou-se novamente o ritmo de desarmazenamento no conjunto das albufeiras; o desarmazenamento durante o mês de Dezembro foi de 163 GWh, situando-se o enchimento, no final do mês, em cerca de 764 GWh, valor este que corresponde a cerca de 36 % do máximo possível.

II — Elementos gerais (GWh)

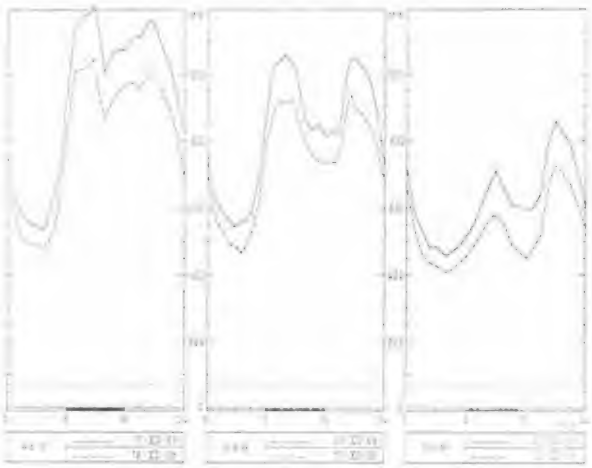
	a) Mensais		Variação %
	1968	1969	
Produção hidráulica (P_h) . .	552,0	527,9	— 4
Produção térmica (P_t)	6,8	86,1	—
Produção total (P_T)	558,8	614,0	+ 10
Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC (E_r)	5,3	2,3	— 57
Exportações (Ex)	1,8	2,2	+ 22
Importações (I)	4,1	24,4	+495
Saldo importador (S_I)	+ 2,3	+22,2	+865
Cons. em bomb. hidroelé. (C_b) (1)	13,9	0,0	—100
Produção para consumos perman. (P_{cp})	498,9	585,4	(1) +17,3
Produção para consumos não perman. (P_{cnp}) . . .	53,6	53,1	— 1
Total	566,4	638,5	+ 13
Coeficiente de hidraulicidade	1,22	0,46	—

NOTA:

(1) O aumento percentual da produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 19,1 e 10,7 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1968	4.ª feira: 1969
Produção hidráulica		(P_h) MWh	20 028	17 276
Produção térmica		(P_t) MWh	1 400	4 620
Produção total		(P_T) MWh	21 428	21 896
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	205	50
	Import.	(I) MWh	20	830
Cons. em bomb. hidroel. (C_b) MWh			1 280	0
Prod. p.ª cons. perm. (P_{cp}) MWh			18 043	21 021
Prod. p.ª cons. não perm. (P_{cnp}) MWh			1 920	1 655
TOTAL		$P_T + (-Ex)$ MWh	19 963	22 676
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência max. MW	1 048	1 213
		Potência min. MW	490	537
		Utiliz. da ponta horas	19,0	18,7
		Factor de carga	0,79	0,78
	P_{cp}	Potência máx. MW	968	1 142
		Potência mín. MW	404	467
		Utiliz. da ponta horas	18,6	18,4
		Factor de carga	0,78	0,77



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês	
	GWh	% (1)
Alto Rabagão	462,2	47,5
Paradela	68,4	30,7
Venda Nova	106,9	83,5
Salamonde	25,6	92,8
Caniçada	6,5	19,6
Vilar	36,6	36,4
Cabril	114,9	33,9
Castelo do Bode	50,1	30,7
Guilhofrei	2,5	30,1
Lagoa Comprida	(2) 15,6	40,3
Santa Luzia	27,8	45,1
Pracana	5,4	41,9
Póvoa	(3) 4,6	32,7
Total { com A. Rabagão . . .	927,1	43,7
Total { sem A. Rabagão . . .	464,9	40,5

NOTAS

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 1,5 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 0,7 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 1,2 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 0,9 GWh no fim do mês.

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2 • DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

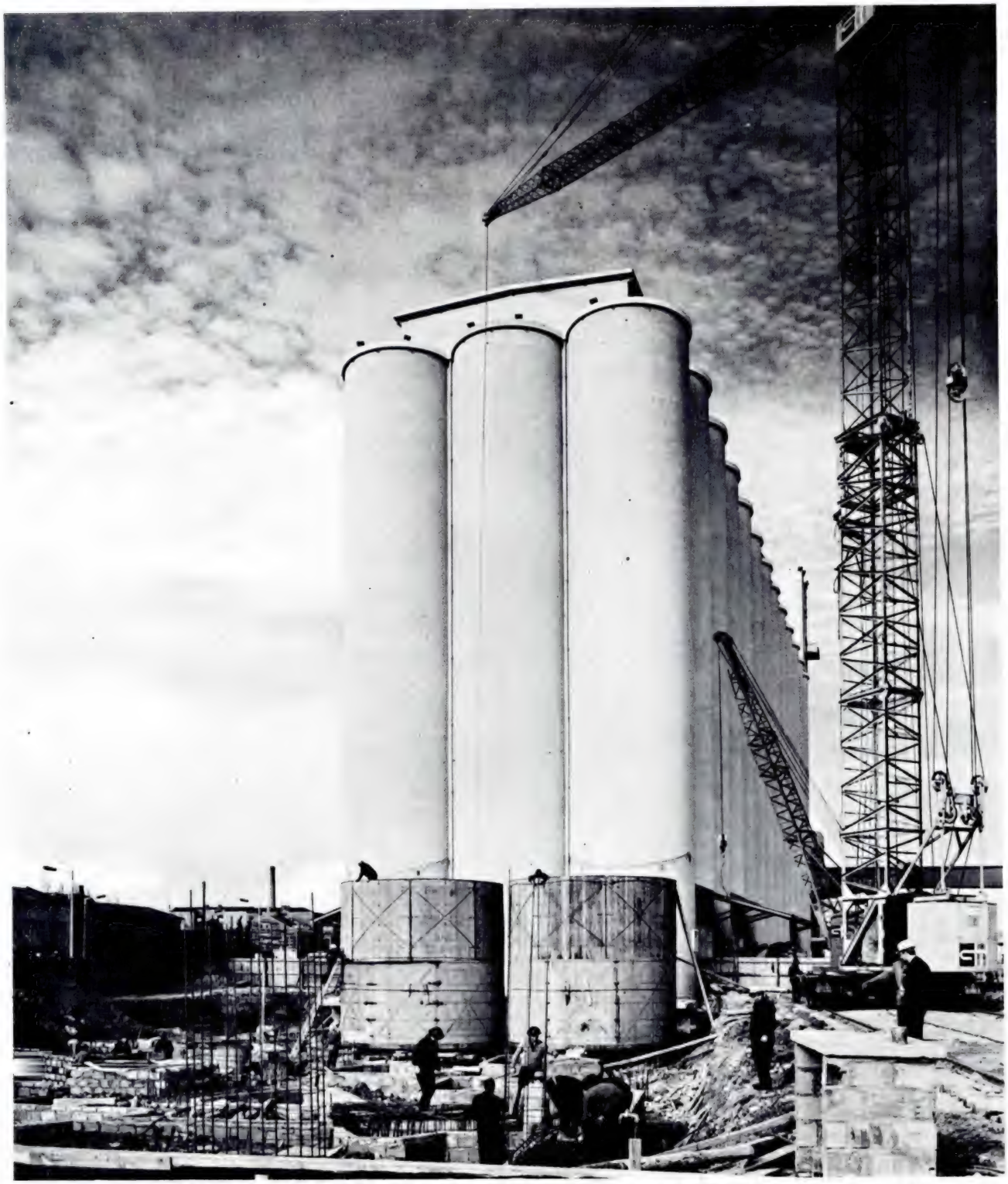
DIRECÇÃO DE SERVIÇOS DE CAMINHOS DE FERRO, PORTOS E TRANSPORTES (DSCFPT) — Moçambique — Porto de Lourenço Marques — Consolidação, Reforço e Aprofundamento do Cais Gorjão entre as Carvoeiras.

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • **FUNDAÇÕES ESPECIAIS**

OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • **PONTES E VIADUTOS**

CONSTRUÇÕES CIVIS • **CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS**

O MIRA - 35000



FEDERAÇÃO NACIONAL DOS PRODUTORES DE TRIGO (FNPT) — Silo de Concentração de Lisboa (Beato) — Empreitada global de construção: 3.ª fase em curso para ampliação da capacidade, de 42 000 t para 60 000 t. Fundação com estacas Ø 1,00 metro.

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS
SILOS E CHAMINÉS
FUNDAÇÕES ESPECIAIS
PONTES E VIADUTOS
CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

C. D. U. 663.63 : 620.193 + 620.191

O PROBLEMA DA CORROSÃO E DAS INCRUSTAÇÕES NOS EVAPORADORES PARA A DESSALGA DA ÁGUA DO MAR

por J. SARAFANA
Eng.º Químico I. S. T.

RESUMO

Na primeira parte deste artigo analisa-se a experiência obtida até agora, no que respeita à corrosão, e procuram indicar-se as melhores soluções.

Na segunda parte trata-se o problema das incrustações descrevendo os métodos existentes para as evitar e finalmente determinam-se as condições para um funcionamento sem incrustações.

SYNOPSIS

The begenning of this paper aims at providing an analysis of corrosion in evaporators and used practice.

The second part looks on the scale formation and prevention in the desalination plant and how to operate without troubles.

1. A CORROSÃO

1.1 A experiência obtida

1.1.1 — Introdução

Uma fracção importante dos custos da água dessalgada é devida ao custo da própria unidade. É pois necessário construir esta com materiais baratos, mas ao mesmo tempo capazes de durar a vida do evaporador, sem necessitar de manutenção elevada.

Até agora a maior parte das experiências provêm de ensaios laboratoriais, instalações piloto e das instalações para demonstração dos diversos processos construídas pelo OSW (Office of Saline Water, Department of Interior, U.S.A.) [9].

Na última década a maior parte das grandes unidades de dessalga construídas foram do tipo MSF (Multi Stage Flash) pelo que os dados disponíveis se referem quase, ùnicamente a estas unidades. No entanto, os resultados podem ser extrapolados para os outros tipos de evaporadores [1].

Vamos pois analisar as diversas partes do evaporador MSF para daí concluir dos melhores materiais em cada uma delas.

Para os outros evaporadores estes resultados serão uma indicação a ser confirmada experimentalmente.

1.1.2 — Tubos de permuta de calor

De um modo geral pode dizer-se que o funcionamento destes tubos é bom qualquer que seja a liga escolhida (quadro I).

QUADRO I

Análise de 55 unidades MSF para uma vida média de 4 anos

TIPO DE LIGA	Liga de alumínio	Cu - Ni 90/10	Cu - Ni 70/30	Titânio
N.º de tubos	532.775	49.816	110.000	7.940
% de tubos substituídos	0,47	0,89	0	0
% de área substituída	0,38	0,96	0	0
N.º de evaporadores	37	18	16	1
% de evaporadores reparados	38	44	0	0
Vida dos tubos (max. e min.) (em meses)	10-88	17-79	24-124	26
Vida média dos tubos (em meses)	50	48	71	26

Entre as ligas de cobre, a liga Cu — Ni 70/30 é a melhor. A liga de alumínio embora pareça melhor que a de Cu — Ni 90/10 é preciso ter em conta que muitas unidades usam tubos de Cu — Ni 90/10 nos andares de maior temperatura.

Com efeito calculando a percentagem de área substituída nas diversas secções teríamos valores diferentes (quadro II).

QUADRO II

% de área substituída

Tipo de Liga	Cu-Ni 90-10	Liga de alumínio
Secção de rejeição . . .	1,00 %	0,52 %
Secção de recuperação . .	0,25 %	0,34 %
Secção de aquecimento .	0,93 %	1,67 %

Esta comparação indica-nos que a liga Cu-Ni 90/10 é apesar de tudo algo melhor que a liga de alumínio nas secções de recuperação de calor e de aquecimento [2] [3] [4].

A maior velocidade de corrosão nos andares de rejeição de calor deve-se a perfurações dos tubos causadas por conchas marinhas fixadas nos tubos e a resultante corrosão localizada o que indica a necessidade de projectar a tomada de água do mar de forma a evitar a introdução de vida marinha nos tubos.

Embora o número de substituições seja pequeno, há sempre uma corrosão uniforme em todo o tubo que depende da liga e das condições de funcionamento.

É de esperar uma velocidade de $0{,}25\text{-}1{,}52.10^{-3}$ cm/ano no caso da liga Cu-Ni 20-30, e de $0{,}29\text{-}1{,}56.10^{-3}$ cm/ano no caso da liga de alumínio. Parece portanto ser de contar com uma vida de 20-30 anos de serviço.

1.1.3 — Armação dos tubos e separadores de vapor

A armação dos tubos é de uma liga de cobre variável enquanto que os separadores de vapor são de monal [4].

No que diz respeito à deterioração destas peças o problema não é grande. O problema de manutenção mais frequente é o das incrustações que se depositam nos separadores.

1.1.4 — Canal da água

A manutenção do canal da água é um dos maiores problemas de conservação deste tipo de unidades, contribuindo grandemente para os períodos de paragem [2] [3] [4] [8].

O problema mais vulgar é a erosão e a corrosão combinadas da superfície do canal, resultante das mudanças de velocidade e de direcção da salmoura quente.

Tem-se verificado corrosões elevadíssimas tais como de 1 cm em cada 400 h de funcionamento para o ferro fundido ou de 0,3 cm/ano no caso de aço.

A fim de reduzir a corrosão têm sido ensaiadas coberturas de plástico (PVC), recobrimentos metálicos (à base de cobre) e protecções catódicas das ligas de ferro.

O uso da liga Cu-Ni 90/10 já foi ensaiado numa dezena de unidades com relativo êxito. O seu preço, não favorece porém a expansão nas unidades de maiores dimensões.

Têm sido feitos estudos no sentido de construir este canal em betão armado. Ùltimamente uma firma americana anunciou ter descoberto um processo de misturar o betão com plásticos o que conferiria à mistura uma grande resistência e impermeabilidade.

1.1.5 — As bombas

Não há ainda unanimidade quanto à melhor liga para as bombas usadas no evaporador [4].

Usam-se normalmente bombas de bronze e de aço inoxidável ou ligado (Ni).

Parece haver tendência para o uso de bombas de aço sempre que haja possibilidade de as bombas estarem sujeitas a cavitação.

1.1.6 — Câmaras de «flash»

Desde que a salmoura seja desarejada e os não condensáveis expulsos o aço é suficientemente resistente à corrosão para poder ser usado nas paredes sem qualquer revestimento, sendo suficiente uma revisão anual para realizar uma reparação apropriada. No caso de maiores corrosões a sua cobertura com plástico não oferece problemas [2] [3] [4].

1.1.7 — Razões para quebra de produção

A capacidade média das unidades consideradas foi até agora 11 % maior que o total das capacidades de projecto.

A maior parte das unidades (quase 60 %) tinha um factor de utilização superior a 90 %. As razões que obrigaram a parar ou a diminuir a produção foram por ordem decrescente de importância [4].

1) — Limpeza ácida das incrustações
2) — Manutenção geral
3) — Manutenção da tomada de água
4) — Reparação do canal de água
5) — Substituição dos tubos por entupimento
6) — Desequilíbrio das temperaturas na unidade
7) — Desequilíbrio das pressões entre a central de produção de energia e o evaporador (unidades mistas)
8) — Problemas com a caldeira (unidades simples)
9) — Ajustamentos dos sistemas de vácuo e de purga
10) — Elevada salinidade do produto
11) — Avaria das bombas
12) — Reparação da secção de aquecimento
13) — Problemas com o funcionamento do sistema de tratamento da alimentação
14) — Falta da procura para a água produzida
15) — Problemas com o sistema de recirculação
16) — Problemas nos orifícios de comunicação entre os andares e na realização da evaporação «flash» por este motivo.

1.2 — Conclusões

1.2.1 — Introdução

A escolha dos materiais para os evaporadores é muito importante e está relacionada com factores económicos e técnicos pois pretende-se produzir água ao mínimo custo possível.

É sempre aleatória a previsão das avarias numa máquina e o custo da paragem devido a avaria ainda é mais difícil de determinar sobretudo (caso da água) se se pretende conhecer o prejuízo feito à comunidade devido à falta de água.

Apesar de tudo é sempre possível tecer algumas considerações baseadas nos factos experimentais que acabámos de ver.

1.2.2 — Tubos de permuta de calor

Se é necessário um serviço absolutamente livre de precalços torna-se quase obrigatório o uso de tubos de Cu-Ni 70/30 ou de titânio pois neste caso o custo mais elevado destes tubos pode justificar-se devido a menor manutenção necessária e ao diminuto número de paragens de produção.

No caso contrário, podemos usar uma liga mais barata (Cu-Ni 90-10 ou uma liga de alumínio) o que obriga a maior manutenção e a um mais elevado número de paragens mas, diminui imenso o preço da primeira instalação de unidade.

Neste caso o projecto do evaporador deve facilitar a substituição dos tubos.

Atendendo à experiência de que já se dispõe é também conveniente o uso da liga de alumínio nos andares de rejeição e de recuperação de calor e da liga Cu-Ni 90/10 nos andares de recuperação de calor e na secção de aquecimento.

Se os tubos de titânio vierem a baixar de preço as grandes produções (construídas para funcionamento contínuo) podem tirar grandes vantagens da sua resistência à corrosão pela água do mar, pois o facto de não haver pràticamente paragens para manutenção permite, para a mesma produção construir uma só unidade (o abastecimento está assegurado com muito maior certeza) e essa unidade será mais pequena que uma outra em que se tivesse de descontar os tempos de paragem.

1.2.3 — Armação dos tubos e separadores de vapor

Uma vez que os materiais já usados não apresentam problemas de maior no que diz respeito à erosão ou corrosão qualquer deles serve. No entanto é de investigar o possível uso de outros materiais mais baratos.

1.2.4 — Canal de água

É evidente que o problema da manutenção deste canal vai obrigar a estudar a escolha do material e a rever o projecto clássico deste canal de forma a melhorar a economia global.

O uso de ferro fundido ou aço inoxidável diminui os encargos de primeira instalação mas obriga a uma protecção adequada.

O uso dum novo material, combinando o cimento convencional e um plástico, agora em

estudo pelo O S W, capaz de resistir à erosão, ao choque térmico e à corrosão e além disso impermeável à água e ao ar, parece vir a ser prometedor.

Actualmente se se pretende uma instalação com um elevado factor de utilização ($>95\%$) deve usar-se uma estrutura barata (ferro fundido ou aço) recoberta com uma liga à base de cobre capaz de resistir à corrosão.

1.2.5 — As bombas

A experiência recolhida até agora permite apenas rejeitar as bombas de ferro fundido para a circulação de água salgada e a escolha de pás de aço inox para maior resistência à erosão por cavitação e à corrosão.

1.2.6 — Câmaras de flash

As câmaras dos evaporadores M S F estão sujeitos a uma corrosão muito pequena, a não ser que o desarejamento seja mal feito ou que a temperatura da salmoura seja elevada. O revestimento com um polímero resolve normalmente este problema nos casos mais agudos. Também se usam revestimentos de materiais como o vidro ou o cimento em algumas partes das câmaras de vaporização.

1.2.7 — Controlo da corrosão

A fim de controlar o estado do evaporador e de avaliar as causas da corrosão a fim de poderem ser ao menos atenuadas deve instalar-se nos evaporadores aparelhagem capaz de medir em qualquer instante:

a) — O grau de polarização da corrosão electroquímica.

b) — As perdas de metal através de medidas de resistência eléctrica.

c) — A espessura dos tubos por meio de ultrasons ou da atenuação de intensidade de um feixe de raios β ou γ.

d) — A temperatura, o pH e o valor do oxigénio, anidrido carbónico e ácido sulfídrico dissolvidos, em vários pontos do evaporador.

Sempre que a unidade pare e também para as peças substituídas devem fazer-se os exames:

a) — Perda de massa das peças substituídas.

b) — Exame visual da corrosão.

c) — Análise dos produtos da corrosão.

d) — Análise da vida média dos tubos.

1.2.8. — A alimentação

A vida dos materiais de construção do evaporador em especial e dos tubos de permuta de calor é muito influenciada pela presença de conchas e de vida marítima na água de alimentação.

O estudo duma nova unidade deve pois incluir um projecto para a tomada de água de um sistema que permita remover eficientemente tudo o que possa vir a alojar-se nos tubos e causar a corrosão localizada destes.

São também de avaliar as variações sazonais da composição da água do mar sobretudo naquelas substâncias que podem vir a afectar o rendimento do evaporador tais como a poluição com sulfuretos, migrações de molúsculos e acumulação de algas marinhas.

2 — AS INCRUSTAÇÕES

2.1 — Introdução

Chamam-se incrustações aos depósitos duros e aderentes que geralmente se formam nas superfícies de troca de calor e que interferem com o bom rendimento da operação contínua.

Os meios que dispomos para o controlo das incrustações dependem das variáveis operatórias como temperatura máxima da salmoura, concentração máxima da salmoura e quantidade de salmoura recirculada.

Estas variáveis operatórias e a eficiência do evaporador estão tão estreitamente ligadas com a economia da conversão que justificam todos os esforços feitos no sentido de precisar com segurança os limites de formação das incrutações.

A sua formação deve-se à inversão da solubilidade a quente de certas substâncias.

2.2 — Os primeiros passos

Os primeiros estudos feitos procuraram resolver o problema das incrustações de carbonato de cálcio e de hidróxido de magnésio (Fig. 1) [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18].

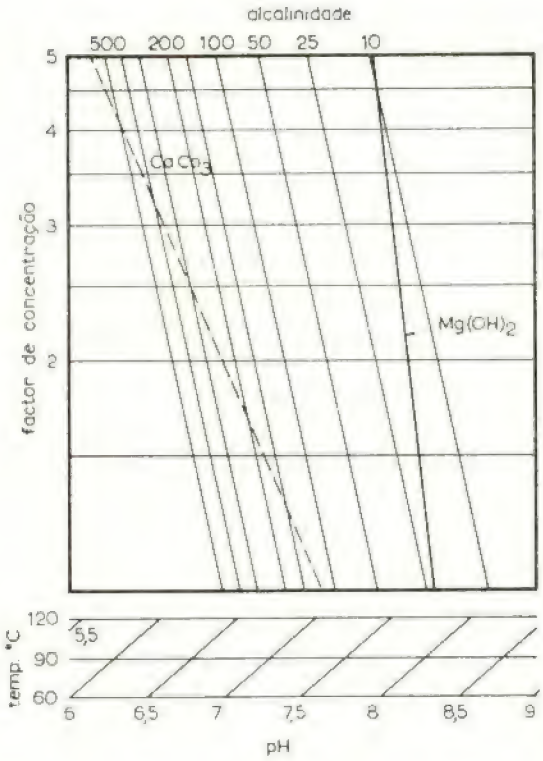


Fig. 1

Com efeito a água do mar está potencialmente saturada em carbonato de cálcio bastando para isso decompor tèrmicamente o ião bicarbonato em solução.

$$2HCO_3^- \rightarrow CO_3^{-3} + CO_2 + H_2O$$

O cálcio combina-se com o ião carbonato formado, formando-se precipitado de $CaCO_3$ (aragonite).

$$Ca^{+2} + CO_3^{-2} \rightarrow Ca\ CO_3$$

Acima de 70°C dá-se a hidrólise parcial do ião carbonato:

$$CO_3^{-2} + H_3O \rightarrow CO_2 + 2\ OH^-$$

o que faz aumentar o pH da solução fazendo precipitar o magnésio presente (brucite)

$$Mg^{+2} + 2\ OH^- \rightarrow Mg\ (OH)_2$$

Qualquer destes constituintes das incrustações alcalinas torna-se menos solúvel à medida que a temperatura sobe pelo que as precipitações tendem a ocorrer e a ser maiores no filme de transição entre o líquido e a superfície de transferência de calor. No entanto, se aumentarmos a pressão do anidrido carbónico estabelece-se o equilíbrio a maior temperatura e portanto a reacção de decomposição do Ca CO_3 não se dá enquanto essa temperatura não for atingida.

Também as paredes da superfície de permuta de calor podem facilitar ou dificultar a formação de incrustações na medida em que a sua rugosidade facilite a formação dos núcleos de germinação. A corrosão destas superfícies vai pois fazer aumentar as incrustações.

Para evitar a formação das incrustações alcalinas têm-se ensaiado vários métodos tendo começado por ser usada a adição de uma mistura designada por Hagevap ou P. D. 8 e composta por trifosfato de sódio, derivados sulfónicos de lenhine e um agente anti-espuma.

Os polifosfatos têm a propriedade de evitar a deposição do Ca CO_3 mesmo em soluções sobresaturadas quando adicionados em quantidades muito pequenas da ordem de 1-5 p.p.m. Porém acima de 90°C a degradação térmica dos polifosfatos torna-se excessiva devido à velocidade de degradação aumentar (o seu valor dobra cada vez que a temperatura aumenta de 6°C) formando-se um fosfato menos polimerizado e por último o ortofosfato.

A eficiência com que este tratamento funciona é muito variável.

Com efeito muitas vezes a quantidade de lamas formadas é tão grande que obriga a uma lavagem com ácido demasiado frequente.

A falta dum conhecimento fundamental sobre o mecanismo do tratamento não permite melhorá-lo com facilidade pois só se pode fazer investigação por tentativas.

Existem, no entanto, estudos sobre a influência do ferro, da sílica e do cloro da água de alimentação, na eficiência do tratamento.

Também tem sido ensaiado o uso de polímeros orgânicos mas por enquanto nenhum é tão bom

como polifosfato para o tratamento das incrustações alcalinas [19] [20] [21]

2.3 — O controlo das incrustações pelo ajustamento do pH

Vimos anteriormente que as incrustações alcalinas eram o resultado da decomposição térmica dos bicabornatos.

A adição de ácido forte (normalmente H_2SO_4 por ser o mais barato) vai fazer libertar o anidrido carbónico antes deste passar a carbonato [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [22] [23]

$$HCO_3^- + H^+ \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Normalmente a edição de 100-120 p.p.m. de ácido sulfúrico corresponde à neutralização de 80 % do bicarbonato o que é suficiente para evitar as incrustações. Antes do evaporador a água de alimentação é desgaseificada.

Como é natural, é de evitar a adição de ácido em excesso pois daí só resulta maior custo operatório devido ao gasto de reagente e à maior corrosão do evaporador.

Se o tratamento se fizer em boas condições o pH à saída do desgaseificador deve andar entre 7,2-7,6.

Este tratamento é muito mais seguro que o Hagevap e custa aproximadamente o mesmo desde que o ácido necessário não seja encarecido pelo transporte.

Por outro lado podemos aumentar a temperatura máxima até ao limite de solubilidade do sulfato de cálcio (122 °C) o que permite uma maior economia térmica do evaporador (Fig. 2).

Note-se que as linhas a cheio indicadas na figura referem-se ao equilíbrio. A cinética do processo de precipitação é porém muito importante. Com efeito, podemos ultrapassar a linha de equilíbrio da anidrite sem que haja qualquer precipitação desde que a taxa de aquecimento ou de evaporação sejam baixas. Na figura indicam-se para um e outro caso as percentagens de sulfato de cálcio precipitado em função da concentração relativa e da temperatura [24].

2.4 — Os novos processos em desenvolvimento

2.4 1 — Electrólise da salmoura

Devido ao elevado custo do transporte de ácido pensou-se em realizar a electrólise da salmoura como fonte do ião hidrogénio sempre que as disponibilidades de ácido fossem reduzidas [25].

A salmoura que sai do evaporador segue em parte para a célula electrolítica. No primeiro andar desta célula usam-se eléctrodos de aço macio para produzir iões de ferro que vão ser oxidados no segundo andar da mesma célula onde se usam eléctrodos de grafite (fig. 3).

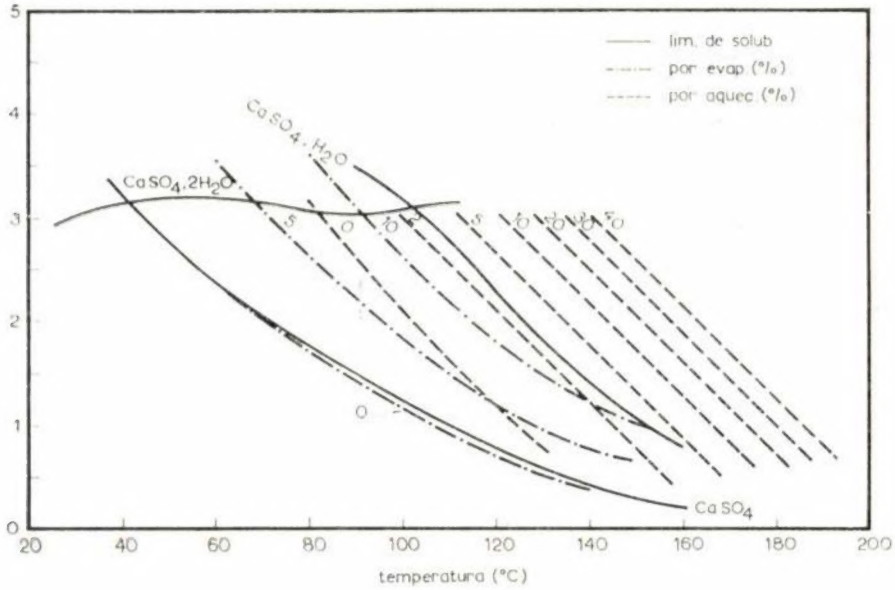


Fig. 2

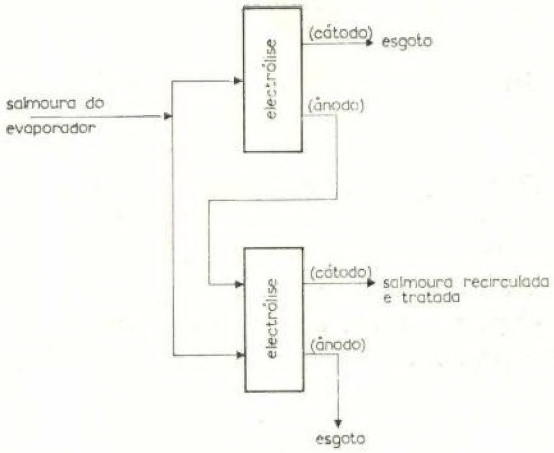


Fig. 3

No entanto, o processo é muito caro não só devido ao consumo de electricidade como as custo e vida dos eléctrodos, à capacidade da célula e à vida do separador entre os dois andares.

Com efeito a baixa utilização dos ânodos e o entupimento do separador devido a incrustações dos hidróxidos de magnésio e de ferro formados por hidrólise encarecem demasiado o processo.

2.4.2 — Adição de anidrido carbónico

A adição de anidrido carbónico sob pressão foi já proposta como um meio para evitar a formação de incrustações alcalinas.

O aumento da pressão CO_2 evita a reacção de decomposição dos bicarbonatos evitando a formação de carbonato de cálcio [26].

A água de alimentação será desgaseificada após a passagem na secção de aquecimento e antes de chegar ao evaporador pròpriamente dito, a fim de limitar a corrosão deste pelo oxigénio dissolvido.

O anidrido carbónico é separado e recirculado e o carbonato de cálcio aí formado e precipitado é removido para evitar o entupimento e a erosão do evaporador.

O processo no entanto não parece prometer devido aos maiores custos da bombagem a elevada pressão e à dificuldade duma separação eficiente do Ca CO_3 sem uma perda de carga elevada.

2.4.3 — Recirculação de núcleos de cristalização

Esta técnica consiste na edição de núcleos de cristalização à água de alimentação com o intuito de fornecer uma superfície para deposição das incrustações [27].

Com efeito é de esperar que se se adicionarem núcleos de Ca CO_3 e de Mg $(OH)_2$ a precipitação se faça mais fàcilmente sobre estes que sobre as paredes do evaporador.

A salmoura terá no fim que ser filtrada e os finos recirculados para o evaporador.

A tentativa de usar núcleos de Ca SO_4 e subir a temperatura para além dos 121°C não resultou pois obriga a um controlo muito apertado da granulometria, da velocidade de crescimento dos núcleos e da estrutura dos núcleos para que estes não se depositem, formando uma espécie de cimento nas zonas estagnadas (figura 4).

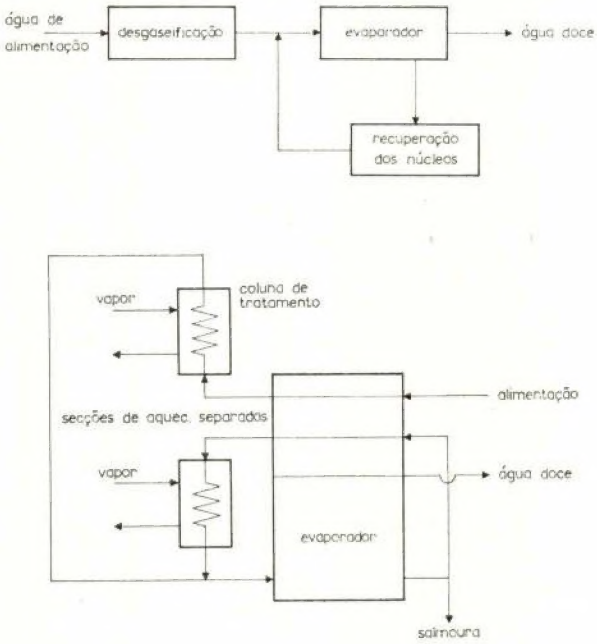


Fig. 4

Além disto, era necessário adicionar o Ca SO_4 nos andares quentes do evaporador pois de outro modo ele dissolvia-se para vir a precipitar mais tarde, nas paredes de transmissão de calor.

Apesar das dificuldades o método foi aperfeiçoado, [28] e espera-se que a introdução de uma coluna de leito fluidizado a seguir à secção de recuperação de calor e na qual estaria contida a secção de aquecimento virá resolver o problema das incrustações de Ca SO_4 (fig. 4). Actualmente o maior problema será o de diminuir a perda de carga na coluna de tratamento.

2.4.4 — Resinas permutadoras

A permuta dos iões cálcicos por iões de sódio foi estudada com o fim de possibilitar um maior rendimento do evaporador [29] [30]. O seu maior inconveniente reside porém nos elevados capitais de que este processo necessita para poder tratar a água de entrada duma unidade de dessalga industrial.

Além disso o custo da resina necessária para substituir aquela que se degrada com o tempo é também importante pelo que os custos operatórios não podem ser baixos.

Saliente-se o estudo técnico-económico duma unidade deste tipo feito pela Catalytic Construction Co em colaboração com o Office of Saline Water e cujo diagrama simplificado se apresenta na figura 5 [31].

Este relatório prevê para uma unidade de dessalga produzindo do 200.10^3 m^3/dia a instalação duma unidade com a capacidade de tratamento de 400.10^3 m^3/dia.

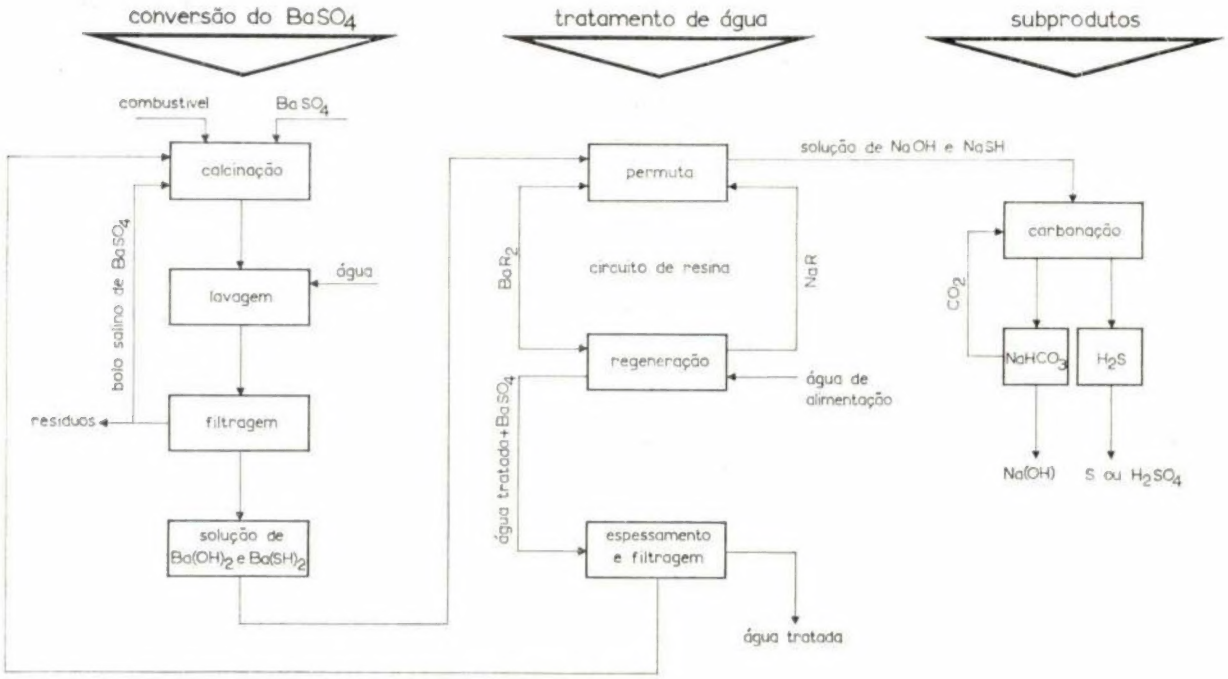


Fig. 5

Foram ainda estudados processos de remoção dos constituintes das incrustações por precipitação e por osmose inversa ou osmose.

Este processo requer evidentemente grandes áreas de membrana o que indica uma unidade industrial para o que o desenvolvimento actual ainda não é suficiente [32].

O primeiro (fig. 6) parece atractivo do ponto de vista económico mas exige ainda um aperfeiçoamento mais completo para minimizar o custo dos produtos químicos usados [33].

Qualquer destes processos envolve capitais elevados pelo que a sua economia é favorecida no caso de grandes unidades.

2.5 — Condições para um funcionamento sem incrustações

No actual estado de desenvolvimento do controlo das incrustações nos evaporadores, o

Este simples ensaio mostra como reduzir os custos de manutenção dos sistemas hidráulicos.

Este equipamento exclusivo, de que faz parte uma seringa para verificar contaminações nos óleos, pode ajudar os engenheiros da Mobil a reduzir o consumo de óleos hidráulicos na sua fábrica.

Mesmo que a sua fábrica seja do tipo médio, tem grandes probabilidades de estar a dispender mais do que deveria, em reparações dos sistemas hidráulicos e também em consumo de lubrificantes.

Foi por isso que criámos este ensaio simples. Ele não serve apenas para revelar problemas na sua instalação, mas também para lhe dizer com antecipação quanto poderá economizar, resolvendo esses mesmos problemas.

Tudo isto faz parte do PROGRAMA MOBIL PARA REDUÇÃO DE CUSTOS aplicado aos sistemas hidráulicos - estudado especificamente para lhe proporcionar economias na manutenção.

Na realidade, após estudo das suas instalações e na sua própria fábrica, estamos aptos a dizer-lhe que economia, em escudos, lhe poderemos proporcionar. E isto é apenas em lubrificantes e custos de reparação. Aquilo que economizará na produção, proveniente das operações hidráulicas, é um bónus.

Mobil

vendemos mais vendendo menos

TÉCNICA — XVIII